

Инж. В. К. НЕЧАЕВ.

## РАСЧЕТ ЛИСТОВЫХ РЕССОР ПАРАШЮТНЫХ УСТРОЙСТВ.

### Предисловие.

Вопросы расчета листовых рессор, имеющих широкое применение в парашютных механизмах подъемных клеток, крайне слабо освещены не только в русской, но и иностранной литературе.

Отсутствие достаточно развитых указаний по методике расчета, является причиной большой и непроизводительной затраты времени на проектирование рессоры.

Предлагаемая работа, выполненная по заданию Научно-Исследовательского Угольного Института, имеет целью восполнить указанный пробел и дать метод расчета листовых рессор парашютных устройств, возможно более точный и удобный для применения в конструкторских бюро.

Развернутая схема расчета, приведенная в конце работы, должна избавить конструктора от необходимости, каждый раз, при проектировании рессоры вновь отыскивать в тексте окончательные расчетные формулы и просматривать их выводы.

К работе приложены шесть, составленных автором, номограмм, могущих в значительной степени сократить расход времени на расчет рессоры.

Несмотря на некоторую специфичность поставленной перед автором задачи, излагаемый метод расчета может быть почти полностью использован при проектировании рессор автомобилей и подвижного состава железных дорог.

Настоящая работа, вместе с номограммами, еще до сдачи ее в печать, была принята для расчетов в Томском Проектном Секторе Шахстроя.

В начале выполнения работы принимал участие аспирант кафедры Прикладной Механики Сибирского Механико-Машиностроительного Института, А. П. Бушковский, при деятельном сотрудничестве всего состава кафедры.

Ряд советов и указаний дал автору зав. кафедрой Прикладной Механики СММИ доцент Н. П. Шубин, просмотревший работу в рукописи.

Инж. В. Нечаев.

## 1. РАСЧЕТ ЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ НА ПРОЧНОСТЬ.

Каждая листовая рессора, предназначенная для работы в парашютном устройстве подъемной клетки, должна удовлетворять целому ряду требований, из которых основными можно считать следующие:

1. Возможно меньший вес рессоры, при достаточной ее прочности;
2. Достаточно большой (не только упругий) прогиб рессоры под действием расчетной нагрузки;
3. Отсутствие расхождения концов листов рессоры при ее деформации.

Первое и третье указанные требования очевидны. Второе требование обуславливается прежде всего конструктивными особенностями парашютного механизма и, кроме того вытекает из необходимости получения возможно меньшей зависимости надежности работы парашюта от степени износа проводников. При чрезмерно жесткой рессоре уже небольшой износ проводников может вызвать значительное уменьшение давления на них тормозных органов парашюта, а, следовательно, и уменьшение тормозного усилия.

При проектировании рессоры деформация ее определяется заранее конструктивными соображениями и схемой всего парашютного устройства.

Отметим, что подобные же требования предъявляются к листовой рессоре в случае применения ее в авто, ж.-д. транспорте и т. д. Здесь гибкость рессоры определяет мягкость рессорной подвески кузова автомобиля и т. п.

Для максимального удовлетворения вышеуказанных требований листовые рессоры конструируются в форме, близкой к телу равного сопротивления изгибу. На этом основан обычный метод расчета листовой рессоры как балки равного сопротивления.

### 1. Элементарный случай.

Из курса Сопротивление Материалов известно, что консольная балка прямоугольного поперечного сечения с постоянной высотой  $h$ , имеющая в плане вид равнобедренного треугольника, представляет брус равного сопротивления изгибу, при действии на ее конце изгибающей силы  $Q$  (фиг. 1).

Максимальное нормальное напряжение в крайних (по высоте) волокнах такой балки одинаково по всей ее длине и определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{6Ql}{Bh^2},$$

где  $B$ —ширина балки в месте ее защемления.

Под действием силы  $Q$  балка изгибается по дуге круга и получает на конце стрелу прогиба:

$$f = \frac{Ql^3}{2EJ_{\max}}, \dots \dots \dots (1)$$

где:

$$J_{\max} = \frac{Bh^3}{12}.$$

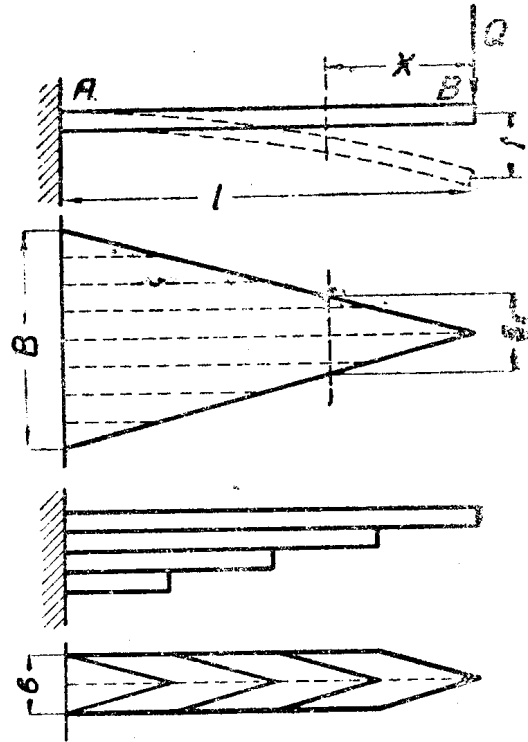
Эта величина  $f$  в полтора раза больше стрелы прогиба призматической балки с постоянным поперечным сечением  $B \times h$ , имеющей, очевидно, ту же прочность, что и рассматриваемая балка равного сопротивления.

Указанная балка равного сопротивления является исходной для построения рессоры. Разрежем эту балку на  $2n$  полосок

равной ширины  $\frac{b}{2} = \frac{B}{2n}$ , соеди-

ним их попарно и сложим одна на другую, как показано на фиг. 1. Получим листовую рессору с  $n$  листами. Толщина всех листов одинакова и равна  $h$ .

Пренебрегая трением между отдельными листами и допуская, что все эти полоски будут изгибаться так же, как и соответствующие части целой треугольной балки (анализ этого допущения будет сделан ниже), можно считать, что все полоски изогнутся по дуге одного круга. При малой толщине листов и большом радиусе кривизны рессоры можно также с достаточной точностью считать, что все листы изогнутся по дугам, описанным из одного центра. Следовательно при изгибе рессоры ее листы расходятся не будут.



Фиг. 1.

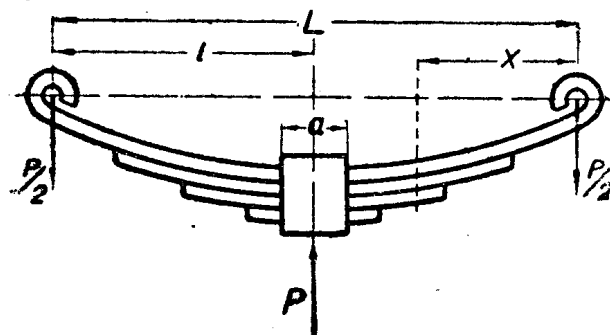
## 2. Листовая рессора на прямых подвесках.

Обычные листовые рессоры состояются из отдельных полос, соответствующей длины, нарезанных в холодном состоянии из полосовой рессорной стали, прямоугольного поперечного сечения  $b \times h$ . Эти полосы выгибаются по дугам круга, закаливаются и складываются одна на другую. Все листы сжимаются по середине хомутом, надетым в горячем состоянии или затяну-

том помощью клина. Для предотвращения возможных сдвигов отдельных листов в сторону под влиянием случайных боковых толчков, для листовых рессор обычно применяется желобчатая сталь (ОСТ—28).

Для получения балки равного сопротивления изгибу концы листов рессоры должны быть обрезаны по треугольнику. В практике же их чаще обрезают по трапеции. Влияние этого отклонения от теоретически требуемой формы будет рассмотрено ниже.

Посадка хомута увеличивает жесткость рессоры в средней ее части. На этом основании некоторые авторы<sup>1)</sup> предлагают



Фиг. 2.

рассматривать половину рессоры, как консольную балку, зашпеченную в хомуте и считать расчетной длиной этой

балки величину  $l - \frac{a}{2}$  (фиг. 2).

Однако, учитывая затруднительность вполне жесткой и плотной посадки хомута, целесообразнее пренебрегать его укрепляющим влиянием и при-

нимать за расчетную длину просто половину хорды рессоры  $l$ .

Под действием внешней нагрузки первоначальная кривизна рессоры уменьшается и становится сравнительной малой. Поэтому с некоторым приближением можно рассматривать половину рессоры, как прямую консольную балку равного сопротивления, длиной  $l$  и нагруженной на конце силой  $\frac{P}{2}$  (фиг. 2).

Здесь  $l$ —половина хорды рессоры в деформированном ее состоянии,  $P$ —внешняя нагрузка, приложенная по середине длины рессоры.

Максимальный изгибающий момент в месте закрепления:

$$M_{\max} = \frac{Pl}{2}.$$

Момент сопротивления опасного сечения рессоры:

$$W = n \frac{bh^2}{6},$$

где  $n$ —число листов рессоры,  
 $b \times h$ —сечение каждого листа.

<sup>1)</sup> Вандергюхт и Короткевич. Основы вагоностроения. 1930 г.

Уравнение прочности:

$$\frac{Pl}{2} = n \frac{bh^2}{6} \sigma_{\max}$$

и отсюда напряжение изгиба:

$$\sigma_{\max} = \frac{3Pl}{nbh^2} \dots \dots \dots (2)$$

Стрела прогиба рессоры  $f$  определится по формуле (1), если в нее вместо  $Q$  вставить  $P/2$ :

$$f = \frac{Pl^3}{4EJ_{\max}}$$

Подставляя значение для максимального момента инерции

$$J_{\max} = n \frac{bh^3}{12}$$

получаем:

$$f = \frac{3Pl^3}{Enbh^3} \dots \dots \dots (3)$$

или

$$f = \frac{3Pl}{nbh^2} \cdot \frac{l^2}{h}$$

Вводя сюда значение для  $\sigma_{\max}$  из формулы (2), имеем:

$$f = \frac{l^2}{Eh} \sigma_{\max} \dots \dots \dots (4)$$

Таким образом, при одном и том же допускаемом напряжении изгиба  $R_b$ , прогиб рессоры обратно пропорционален толщине листов, из которых она составлена и прямо пропорционален квадрату длины рессоры. Чем большая гибкость требуется от рессоры, тем тоньше должны быть выбраны листы для ее изготовления.

### 3. Листовая рессора на косых подвесках.

Этот случай практически наиболее важен. Как выяснится ниже, изменением угла наклона рессорных подвесок можно несколько менять гибкость уже готовой рессоры.

Введем обозначения (фиг. 3):

$\lambda$ —стрелка рессоры после деформации,

$2l$ —хорда рессоры после деформации,

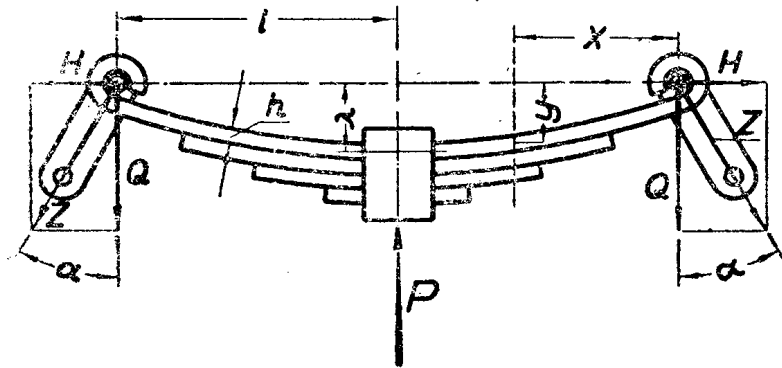
$P$ —внешняя нагрузка на рессору, приложенная в ее середине,

$\alpha$ —угол наклона рессорных подвесок к вертикали,

$f$ —упругая деформация (стрела прогиба) рессоры под действием силы  $P$ .

а) Определение напряжений.

Под действием силы  $P$  в рессорных подвесках возникают усилия  $Z$ , направленные наклонно вниз. Их величина определится из очевидного соотношения:



Фиг. 3.

$$2Z \cos \alpha = P$$

или

$$Z = \frac{P}{2 \cos \alpha} \quad \dots (5)$$

Усилие  $Z$  можно разложить по вертикальному и горизонтальному направлениям.

Вертикальное усилие равно:

$$Q = Z \cos \alpha = \frac{P}{2},$$

и горизонтальное усилие

$$H = Z \sin \alpha = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Вертикальное усилие  $Q$  создает изгиб рессоры, а горизонтальное усилие  $H$ , кроме изгиба вызывает еще растяжение коренного рессорного листа. Изгибающий момент в среднем сечении рессоры:

$$M_{\max} = Ql + H\lambda = \frac{P}{2} l + \frac{P}{2} \lambda \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$M_{\max} = \frac{P}{2} (l + \lambda \operatorname{tg} \alpha).$$

Уравнение прочности изгибу:

$$\frac{P}{2} (l + \lambda \operatorname{tg} \alpha) = n \frac{bh^2}{6} \sigma_{\max} \quad \dots (6)$$

и отсюда напряжение изгиба в среднем сечении рессоры:

$$\sigma_{\max} = \frac{3P (l + \lambda \operatorname{tg} \alpha)}{nbh^2}.$$

Напряжение растяжения в коренном листе:

$$\sigma = \frac{H}{bh} = \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{2bh} \quad \dots (7)$$

и полное напряжение в нем:

$$\sigma'_{max} = \sigma_{max} + \sigma = \frac{3P(l + \lambda \operatorname{tg} \alpha)}{nbh^2} + \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{2bh} \dots \dots (8)$$

Сравнение уравнения (2) и (6) показывает, что при расчете рессоры на косых подвесках уже нельзя пренебрегать ее кривизной и применять формулы, полученные для прямых брусьев.

б) Определение деформаций.

а) Приближенный способ.

Для определения величины прогиба рессоры опять воспользуемся теоремой Кастилиано. Работа деформации изгиба половины рессоры силами  $Q$  и  $H$  определится общим выражением:

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_x^2 ds}{J_x}$$

где  $ds$ —элемент длины дуги рессоры.

В виду обычно малой кривизны рессоры в деформированном состоянии, можно приближенно принять  $ds$  равной элементу длины хорды рессоры  $dx$ , т. е.

$$ds \cong dx,$$

тогда

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_x^2 dx}{J_x}.$$

Стрела прогиба середины рессоры определится теперь на основании теоремы Кастилиано:

$$f = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{2M_x \cdot \frac{\partial M_x}{\partial Q}}{J_x} dx.$$

Изгибающий момент в сечении  $x$  (фиг. 3):

$$M_x = Qx + Hy.$$

Делая вновь допущение, что половина рессоры деформируется так же, как консольная балка, изогнутая по форме рессоры и имеющая в плане треугольную форму, можно написать:

$$J_x = J_{max} \cdot \frac{x}{l},$$

где

$$J_{max} = n \frac{bh^3}{12}.$$

Вследствие малой кривизны упругой кривой рессоры и малой величины стрелки  $\lambda$  по сравнению с  $l$ , можно приближенно считать, что ордината  $y$  изменяется пропорционально  $x$ .

Это допущение равнозначно замене половины дуги рессоры прямой линией. Следовательно приближенно:

$$y = \lambda \frac{x}{l}.$$

Теперь изгибающий момент:

$$M_x = Qx + Hy = Qx + H\lambda \frac{x}{l}$$

и отсюда

$$\frac{\partial M_x}{\partial Q} = x.$$

Подставляем полученные значения для  $J_x$ ,  $M_x$  и  $\frac{\partial M_x}{\partial Q}$  в выражение для  $f$ :

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{2 \left( Qx + H\lambda \frac{x}{l} \right) x}{J_{\max} \frac{x}{l}} dx = \\ &= \frac{l}{EJ_{\max}} \int_0^l \left( Qx + H\lambda \frac{x}{l} \right) dx = \frac{l^2}{2EJ_{\max}} (Ql + H\lambda) = \\ &= \frac{l^3}{2EJ_{\max}} \left( Q + \frac{\lambda}{l} H \right). \end{aligned}$$

Введем сюда значение для  $Q$  и  $H$ :

$$f = \frac{l^3}{2EJ_{\max}} \left( \frac{P}{2} + \frac{\lambda}{l} \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{2} \right) = \frac{Pl^3}{4EJ_{\max}} \left( 1 + \frac{\lambda}{l} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Наконец, вставляя значение для момента инерции:

$$J_{\max} = n \frac{bh^3}{12},$$

получим окончательную формулу.

$$f = \frac{3Pl^3}{Enbh^3} \left( 1 + \frac{\lambda}{l} \operatorname{tg} \alpha \right) \quad (10)$$

Ее можно написать в виде:

$$f = \frac{3Pl^3}{Enbh^3} \cdot \varphi \quad (11)$$



или же

$$f = \frac{Pl^3}{4EJ_{max}} \cdot \varphi \quad (12)$$

Здесь первая часть выражения для  $f$ :

$$\frac{3Pl^3}{Enbh^3} \text{ или } \frac{Pl^3}{4EJ_{max}}$$

дает очевидно стрелу прогиба прямой консольной балки равного сопротивления, длиной  $l$ , нагруженной на конце силой  $P/2$  и имеющей в месте защемления момент инерции, равный моменту инерции среднего сечения рессоры.

Коэффициент

$$\varphi = \left(1 + \frac{\lambda}{l} \operatorname{tg} \alpha\right) \quad (13)$$

учитывает кривизну рессоры и растягивающее действие косых подвесок.

Из этого выражения видно, что увеличение угла наклона подвесок к вертикали увеличивает гибкость рессоры.

Формула (10) написанная в виде:

$$f = \frac{6l^2 Q}{Enbh^3} (l + \lambda \operatorname{tg} \alpha),$$

где  $Q = \frac{P}{2}$  — вертикальная нагрузка на конце рессоры, приведена в справочнике Hütte<sup>1)</sup>.

β) Более точный способ.

Рассмотренный выше метод определения деформаций рессоры на косых подвесках основан на целом ряде допущений.

Половина дуги рессоры принята за прямую линию, при подсчете работы деформации длина дуги принята равной длине хорды ( $ds = dx$ ) и не учтена работа растяжения коренного листа, горизонтальным распором подвесок.

Решим задачу определения деформации рессоры более точным способом. Для этого рассматриваем половину рессоры как консольную пластину толщины  $h$ , изогнутую по дуге радиуса  $R$  и имеющую в деформированном состоянии, в плане вид треугольника (фиг. 4).

Обозначим через  $\varphi_0$  — половину угла между крайними радиусами изогнутой рессоры.

Изгибающий момент в сечении  $x$  равен:

$$M_x = Qx + Hy, \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Hütte, т. I, стр. 728, издание 13.

где согласно чертежу:

$$\begin{cases} x = l - R \sin \varphi \\ y = R \cos \varphi - a \end{cases} \quad (14a)$$

Работа деформации изгиба бруса малой кривизны, как известно, определяется формулой<sup>1)</sup>:

$$U = \int_0^s \left( \frac{M_x^2}{2EJ_x} + \frac{N^2}{2EF} \right) ds. \quad (15)$$

Здесь:

$ds$ —элемент дуги рессоры,

$J_x$ —момент инерции поперечного сечения,

$F$ —площадь поперечного сечения бруса,

$N$ —нормальная сила, растягивающая данное сечение.

Так как растяжению силой  $H$  подвергается только один коренной лист, то:

$$F = bh.$$

Нормальное усилие, растягивающее данное сечение, переменное по длине дуги и определяется очевидно выражением:

$$N = H \cos \varphi.$$

Прогиб рессоры  $f$  определится из выражения (15):

$$f = \frac{\partial U}{\partial Q} = \int_0^s \frac{2M_x \frac{\partial M_x}{\partial Q}}{2EJ_x} ds.$$

(Второе слагаемое работы  $T$  дает производную по  $Q$ , равную нулю, т. к. от величины  $Q$  оно не зависит).

Вставляя сюда значения:

$$M_x = Qx + Hy,$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial Q} = x,$$

$$ds = R d\varphi,$$

$$J_x = J_{\max} \frac{x}{l},$$

<sup>1)</sup> С. П. Тимошенко. Курс сопротивления материалов. 1931 г., стр. 408.

имеем:

$$f = \int_0^{\varphi_0} \frac{2M_x \cdot x \cdot R}{2EJ_{max} \cdot \frac{x}{l}} d\varphi = \frac{Rl}{EJ_{max}} \int_0^{\varphi_0} M_x d\varphi =$$

$$= \frac{Rl}{EJ_{max}} \int_0^{\varphi_0} (Qx + Hy) d\varphi.$$

На основании формул (14-а):

$$f = \frac{Rl}{EJ_{max}} \int_0^{\varphi_0} [Q(l - R \sin \varphi) + H(R \cos \varphi - a)] d\varphi,$$

откуда после интегрирования:

$$f = \frac{Rl}{EJ_{max}} [Q(l\varphi_0 + R \cos \varphi_0 - R) + H(R \sin \varphi_0 - a\varphi_0)].$$

Согласно фиг. 4:

$$R \cos \varphi_0 = a,$$

$$R \sin \varphi_0 = l,$$

и

$$f = \frac{Rl}{EJ_{max}} [Q(l\varphi_0 + a - R) + H(l - a\varphi_0)] =$$

$$= \frac{Rl}{EJ_{max}} [Q(l\varphi_0 - \lambda) + H(l - a\varphi_0)], \quad (16)$$

так как

$$R - a = \lambda.$$

Полухорду рессоры  $l$  можем рассматривать как высоту прямоугольного треугольника, вписанного в круг радиуса  $2R$  и опирающегося на его диаметр. Высота  $l$  делит основание треугольника на два отрезка<sup>1)</sup>:

$$2R - \lambda \text{ и } \lambda.$$

На основании известной геометрической теоремы:

$$l^2 = (2R - \lambda) \lambda.$$

Отсюда:

$$R = \frac{l^2 + \lambda^2}{2\lambda},$$

$$a = R - \lambda = \frac{l^2 - \lambda^2}{2\lambda}.$$

<sup>1)</sup> Аналогичные же соображения лежат в основе вывода формулы (30) см. фиг. 6.

Кроме того:

$$\sin \varphi_0 = \frac{l}{R} = \frac{2\lambda l}{l^2 + \lambda^2},$$

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{2\lambda l}{l^2 + \lambda^2}.$$

Теперь выражение (16) может быть переписано в следующем виде:

$$f = \frac{l}{EJ_{max}} \left( \frac{l^2 + \lambda^2}{2\lambda} \right) \left[ Q \left( l \arcsin \frac{2\lambda l}{l^2 + \lambda^2} - \lambda \right) + \right. \\ \left. + H \left( l - \frac{l^2 - \lambda^2}{2\lambda} \arcsin \frac{2\lambda l}{l^2 + \lambda^2} \right) \right].$$

Заменяя здесь  $Q$  и  $H$  их значениями через  $P$ :

$$Q = \frac{P}{2},$$

$$H = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

после простых алгебраических преобразований получаем окончательно:

$$f = \frac{Pl^3}{4EJ_{max}} \cdot \varphi, \quad (17)$$

где:

$$\varphi = A + B \operatorname{tg} \alpha, \quad (18)$$

при чем:

$$A = \left( k + \frac{1}{k} \right) \left[ \arcsin \frac{2}{k + \frac{1}{k}} - k \right],$$

$$B = \left( k + \frac{1}{k} \right) \left[ 1 - \left( \frac{1}{2k} - \frac{k}{2} \right) \arcsin \frac{2}{k + \frac{1}{k}} \right], \quad (19)$$

$$k = \frac{\lambda}{l}. \quad (20)$$

Здесь опять подтверждается зависимость величины прогиба рессоры от угла наклона  $\alpha$  рессорных подвесок. Увеличение  $\alpha$  дает увеличение гибкости рессоры.

Приведенный ниже пример расчета рессоры показывает, что разница между результатами, полученными по упрощенному и более точному методам, при малой кривизне рессоры незначи-

тельна. На этом основании в дальнейших выводах и расчетах мы будем пользоваться более короткими формулами, полученными по упрощенному методу.

#### 4. Проектирование листовой рессоры.

Выше при анализе напряжений и деформаций рессоры на косых подвесках были получены следующие соотношения:

1) Уравнение прочности рессоры на изгиб:

$$\frac{P}{2} (l + \lambda \operatorname{tg} \alpha) = n \frac{bh^2}{6} \sigma_{\max}, \quad (16)$$

которое теперь может быть написано в виде:

$$n \frac{bh^2}{6} \sigma_{\max} = \frac{Pl}{2} \varphi. \quad (21)$$

2) Стрела прогиба рессоры:

$$f = \frac{3Pl^3}{Enbh^3} \varphi. \quad (17)$$

3) Коэффициент, учитывающий кривизну рессоры и угол наклона ее подвесок:

$$\varphi = \left( 1 + \frac{\lambda}{l} \operatorname{tg} \alpha \right). \quad (13)$$

Называя гибкостью рессоры  $\Delta$  величину прогиба ее в сантиметрах, под действием нагрузки, равной 1000 кг, можно написать:

$$\Delta = \frac{f}{P/1000}, \quad (22)$$

или

$$f = \frac{P}{1000} \Delta, \quad (23)$$

где нагрузка  $P$  измеряется в килограммах.

Для определения гибкости  $\Delta$  подставим в (17) значение  $P = 1000$  кг

$$\Delta = \frac{3000l^3}{Enbh^3} \varphi \frac{cm}{tn}. \quad (24)$$

Представим выражение (24) в следующем виде:

$$\Delta = \frac{500l^3}{Ehn} \frac{bh^2}{6} \varphi$$

или

$$n \frac{bh^2}{6} = \frac{500l^3}{E\Delta h} \varphi$$

и подставим его в уравнение прочности (21):

$$\frac{500l^3}{E\Delta h} \varphi \sigma_{max} = \frac{Fl}{2} \varphi,$$

отсюда окончательно <sup>1)</sup>

$$P = \frac{1000l^2}{E\Delta h} \sigma_{max}. \quad (25)$$

Из (24) определим также число листов рессоры:

$$n = \frac{3000l^3}{E\Delta hb^3} \varphi. \quad (26)$$

Уравнения (13), (23), (25) и (26) являются основными при расчете рессоры. Применение их показано ниже на конкретном примере (стр. 20) и приведено в общей расчетной схеме листовой рессоры.

По заданной нагрузке  $P$  и выбранным:

- 1) Профилю листов  $b \times h$ ,
- 2) допускаемому напряжению изгиба  $R_b$ ,
- 3) гибкости рессоры  $\Delta$  или желательной деформации  $f$ ,
- 4) углу наклона подвесок  $\alpha$ ,
- 5) стрелке деформированной рессоры  $\lambda$ ,

указанные уравнения дают возможность определить необходимое число листов рессоры  $n$  и хорду ее в деформированном состоянии  $2L$ .

Для установления связи между геометрическими элементами рессоры в свободном и деформированном состоянии обозначим (фиг. 5):

$R$ —фабричный радиус кривизны коренного листа,

$2L$ —фабричная хорда рессоры,

$F$ —фабричная стрелка рессоры, измеряемая от линии, соединяющей центры ушков, до первого, коренного листа,

$S$ —длина выпрямленного коренного листа,

$2\varphi_0$ —угол, составленный крайними радиусами свободной рессоры,

$r$ —средний радиус ушков коренного листа.

<sup>1)</sup> Формула (25) дает возможность подсчитать максимальное нормальное напряжение  $\sigma_{max}$ , возникающее в листах данной рессоры, при изгибе ее силой  $P$ .

Вставляя сюда вместо  $\sigma_{max}$  допускаемое напряжение на изгиб  $R_b$ , получим основное выражение, необходимое для проектирования рессоры:

$$P = \frac{1000l^2}{E\Delta h} R_b \quad (25-a)$$

Фабричные размеры, т. е. размеры рессоры в свободном состоянии (без нагрузки) необходимы при ее изготовлении и должны быть указаны на рабочем чертеже.

Под действием нагрузки  $P$ , фабричная стрелка  $F$  уменьшается до величины  $\lambda$ , названной выше стрелкой рессоры в деформированном состоянии.

Упругая деформация (стрела прогиба) рессоры:

$$f = F - \lambda.$$

Значения  $f$  и  $\lambda$  принятые в вышеуказанном расчете позволяют определить фабричную стрелку:

$$F = f + \lambda. \quad (27)$$

Коренной лист в деформированном состоянии представляет

собой дугу круга, имеющую хорду  $AB = 2l$  (между вертикальными осями, проходящими через центры ушков) и стрелку  $\lambda - r$ , где  $r$  — средний радиус ушков (фиг. 5).

При известной хорде  $2l$  и стрелке  $\lambda - r$  длина выпрямленного коренного листа (длина дуги  $AB$ ) с достаточной для практики точностью может быть определена по приближенной формуле<sup>1)</sup> (Нütte, т. I, стр. 35):

$$S = \sqrt{(2l)^2 + \frac{16}{3}(\lambda - r)^2}$$

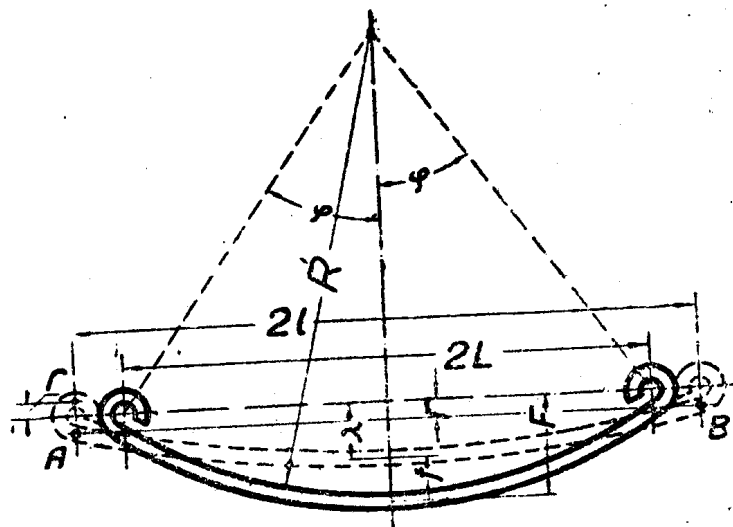
или

$$S = 2 \sqrt{l^2 + \frac{4}{3}(\lambda - r)^2} \quad (28)$$

При деформации рессоры длина  $S$  коренного листа остается неизменной, т. е. фабричные стрелка и хорда постоянно связаны соотношением:

$$S = 2 \sqrt{l^2 + \frac{4}{3}(F - r)^2}$$

<sup>1)</sup> Указанная приближенная формула дает максимальную ошибку в 2,78% при центральном угле  $2\varphi_0 = 180^\circ$ ; при угле в  $90^\circ$  ошибка составляет только 0,18%, что для практики следует считать достаточным, т. к. в рессорах угол  $2\varphi_0$  обычно не превосходит  $90^\circ$ .



Фиг. 5.

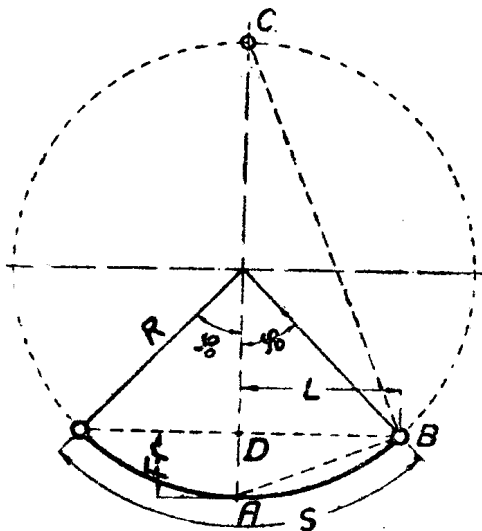
или на основании формулы (28):

$$L^2 + \frac{4}{3}(F-r)^2 = l^2 + \frac{4}{3}(\lambda-r)^2,$$

$$L^2 = l^2 + \frac{4}{3}(\lambda-r)^2 - \frac{4}{3}(F-r)^2.$$

Отсюда получаем окончательное выражение для определения фабричной хорды рессоры:

$$2L = 2 \sqrt{l^2 + \frac{4}{3}(\lambda-r)^2 - \frac{4}{3}(F-r)^2}. \quad (29)$$



Фиг. 6.

Для прямоугольного треугольника  $ABC$  (фиг. 6), опирающегося на диаметр  $2R$  и имеющего высоту  $BD=L$  на основании известной геометрической теоремы можно написать:

$$\frac{F-r}{L} = \frac{L}{2R-(F-r)},$$

откуда:

$$R = \frac{L^2 + (F-r)^2}{2(F-r)}.$$

Подставим сюда значение  $L$  из (29):

$$\begin{aligned} R &= \frac{l^2 + \frac{4}{3}(\lambda-r)^2 - \frac{4}{3}(F-r)^2 + (F-r)^2}{2(F-r)} = \\ &= \frac{l^2 + \frac{4}{3}(\lambda-r)^2 - \frac{1}{3}(F-r)^2}{2(F-r)}. \end{aligned}$$

Но согласно (28):

$$l^2 + \frac{4}{3}(\lambda-r)^2 = \frac{S^2}{4}$$

и

$$R = \frac{\frac{S^2}{4} - \frac{(F-r)^2}{3}}{2(F-r)}$$



или

$$R = \frac{3S^2 - 4(F - r)^2}{24(F - r)}. \quad (30)$$

Последнее выражение служит для определения фабричного радиуса кривизны коренного листа рессоры.

Наконец угол между крайними радиусами рессоры в свободном состоянии определяется из очевидного соотношения:

$$2\varphi_0 = \frac{S}{R} \frac{360}{2\pi} = 57,4 \frac{S}{R}. \quad (31)$$

(угол  $\varphi_0$ —в градусах).

### 5. Номограммы для расчета рессор.

Для упрощения расчетов по определению размеров листовых рессор, автором составлены номограммы, основанные на полученных выше расчетных уравнениях (25) и (26).

В конце работы приложены шесть номограмм, для шести, наиболее употребительных в практике, размеров сечений рессорной стали по ОСТ—28. Каждая из этих номограмм справедлива лишь для тех размеров поперечного сечения  $b \times h$  рессорной стали, которые указаны крупным шрифтом в ее верхнем правом углу.

Метод пользования номограммами подробно изложен в общей схеме расчета листовой рессоры (стр. 44). Кроме того, примерный путь расчета показан на каждой из них пунктирными линиями и стрелками.

Для построения этих номограмм уравнения (25) и (26) были приведены к линейному виду путем логарифмирования.

Считая излишним приводить здесь описание методики их построения и таблицы всех, выполненных при этом построений, отметим только следующее.

Для рессорной закаленной стали модуль упругости  $E$  колеблется в пределах<sup>1)</sup>:

$$E = 1,9 \cdot 10^6 - 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2,$$

в справочнике „Hütte“ для рессорной стали приводится значение:

$$E = 2,2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2.$$

При расчете номограмм мы приняли:

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2,$$

что можно считать достаточно надежной величиной.

<sup>1)</sup> Вандергюхт и Короткевич. Основы вагоностроения. 1930 г.

Но несмотря на определенную выбранную величину  $E$ , номограммы не теряют своей применимости и при любых других значениях модуля Юнга.

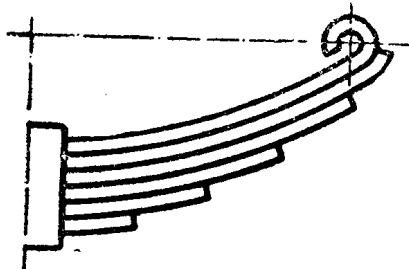
Положим, что материал, имеющийся на заводе при конструировании рессоры, обладает модулем упругости  $E_1$ , не равным принятому нами выше  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . Пользуясь прилагаемыми номограммами, обычным путем, по заданной нагрузке  $P$  и выбранным  $R_b$ ,  $\Delta$  и  $\varphi$ , определяем полухорду деформированной рессоры  $l$  и необходимое число листов  $n$ . При модуле  $E_1$  рессора сохранит требуемые значения  $R_b$ ,  $\varphi$  и  $\Delta$ , если сделать длину полухорды ее  $l_1$  и число листов  $n_1$  равными следующим значениям:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= l \sqrt{\frac{E_1}{E}} \\ n_1 &= n \frac{E}{E_1} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Эти соотношения легко получаются из уравнений (25) и (26).

## 6. Рессоры с составным главным листом.

Для усиления листов рессоры, к которым присоединяются подвески, на верхний коренной лист иногда накладывают еще несколько (обычно не больше двух) дополнительных листов с прямоугольными концами. Первый добавочный, подкоренной лист делается обычно настолько длинным, что частично обхватывает ушки. Таким образом получается комбинированная рессора или рессора с составным коренным листом (фиг. 7). Целесообразность такого устройства выясняется из следующих соображений. Излом ко-



Фиг. 7.

ренного листа, на который непосредственно воздействует вся нагрузка, очевидно значительно опаснее, чем поломка какого либо из промежуточных листов. Между тем коренной лист, кроме изгибающих моментов, распределяющихся между всеми листами, воспринимает на себя целиком растягивающие усилия косых подвесок и, на участке между ушком и первым подкоренным листом, подвергается значительным срезающим усилиям.

Кроме того, загиб ушков, представляющий операцию более затруднительную, чем изгиб листа по лекалу, требует более сильного нагрева его концов. Повышенный же нагрев не проходит бесследно для структуры металла. Наконец, при случайных боковых нагрузках на рессору, коренной лист подвергается скручиванию.

Оба (или три) главных листа обычно имеют одинаковое поперечное сечение, лежат один на другом и изгибаются вместе, как один лист, момент инерции которого равен сумме моментов инерции слагающих листов.

Добавление новых листов конечно уменьшает гибкость рессоры. Для сохранения справедливости всего предыдущего расчета необходимо выбрать толщину коренного и дополнительных листов такой, чтобы гибкость всей рессоры осталась прежней.

Момент инерции поперечного сечения составного коренного листа должен быть равен моменту инерции сечения обычного коренного листа, рессоры нормальной конструкции.

Рассмотрим два случая:

1) Коренной лист составлен из двух; толщина каждого из них равна  $h_1$ .

$$\text{Условие равной гибкости: } 2 \frac{bh_1^3}{12} = \frac{bh^3}{12},$$

где  $h$  — толщина всех остальных листов рессоры.  
Отсюда:

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt[3]{2}} = 0,794 h,$$

т. е. каждый из двух листов должен иметь толщину:

$$h_1 \cong \frac{4}{5} h.$$

Момент сопротивления составного коренного листа:

$$2 \frac{bh_1^2}{6} = 2 \frac{b \cdot (0,8h)^2}{6} = 1,28 \frac{bh^2}{6},$$

т. е. составной коренной лист прочнее простого на 28%.

2) Коренной лист составлен из трех листов, толщиной  $h_2$ .  
Условие равной гибкости:

$$3 \frac{bh_2^3}{12} = \frac{bh^3}{12},$$

$$h_2 = \frac{h}{\sqrt[3]{3}} = 0,693 h \cong 0,7 h,$$

и суммарный момент сопротивления:

$$3 \cdot \frac{bh_2^2}{6} = 3 \frac{b \cdot (0,7 h)^2}{6} = 1,47 \frac{bh^2}{6}.$$

Отсюда следует, что комбинированная рессора может быть рассчитана также, как и рессора обычной нормальной конструкции.

После расчета следует только для двойного коренного листа взять рессорную сталь толщиной  $0,8 h$  и для тройного— $0,7 h$  чем увеличивается прочность листа, в первом случае на 28% и во втором—на 47%, при неизменной гибкости всей рессоры.

### 7. Пример расчета рессоры.

Покажем, на конкретном примере, применение выведенных выше расчетных формул для определения размеров листовой рессоры.

Рассчитаем рессору для заданной нагрузки:

$$P = 4 \text{ tn},$$

и требуемой гибкости:

$$\Delta = 1 \text{ cm/tn}.$$

Выбираем допускаемое напряжение изгиба:

$$R_b = 5000 \text{ kg/cm}^2$$

и размеры поперечного сечения листов (для желобчатой рессорной стали, по ОСТ—28):

$$b = 100 \text{ mm}, h = 13 \text{ mm}.$$

1) Половина хорды рессоры в деформированном состоянии. Из формулы (25-а) при  $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ :

$$l = \sqrt{\frac{PE\Delta h}{1000 R_b}} = \sqrt{\frac{4000 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 1,3}{1000 \cdot 5000}} = 46,7 \text{ cm}.$$

2) Коэффициент  $\varphi$ . Принимаем стрелку рессоры в деформированном состоянии:

$$\lambda = 5 \text{ cm}.$$

и угол наклона подвесок:

$$\alpha = 45^\circ, \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

Согласно (13):

$$\varphi = 1 + \frac{\lambda}{l} \operatorname{tg} \alpha = 1 + \frac{5}{46,7} = 1,107.$$

3) Число листов. По формуле (26)

$$n = \frac{3000 l^3 \varphi}{E \Delta b h^3} = \frac{3000 \cdot 46,7^3 \cdot 1,107}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 1,3^3} = 7,3.$$

Округляем:

$$n = 7.$$

4) Действительная гибкость рессоры. Из формулы (26):

$$\Delta = \frac{3000 l^3 \varphi}{Enbh^3} = \frac{3000 \cdot 46,7^3 \cdot 1,107}{2,1 \cdot 10^6 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 1,3^3} = 1,045 \text{ cm/tn.}$$

5) Упругая стрела прогиба:

$$f = P\Delta = 4 \cdot 1,045 = 4,18 \text{ cm.}$$

6) Фабричная стрела рессоры:

$$F = f + \lambda = 4,18 + 5,0 = 9,18 \text{ cm} \cong 9,2 \text{ cm.}$$

7) Действительное напряжение изгиба по формуле (25):

$$\sigma_{\max} = \frac{PE\Delta h}{1000 l^2} = \frac{4000 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,045 \cdot 1,3}{1000 \cdot 46,7^2} = 5220 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

8) Усилие, растягивающее коренной лист (см. стр. 6):

$$H = \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{4000}{2} = 2000 \text{ kg.}$$

9) Напряжение растяжения в коренном листе:

$$\sigma = \frac{H}{bh} = \frac{2000}{10 \cdot 1,3} = 154 \text{ kg/cm}^2.$$

10) Полное нормальное напряжение в коренном листе:

$$\sigma'_{\max} = 5220 + 154 = 5374 \text{ kg/cm}^2,$$

что можно считать еще допустимым.

11) Длина выпрямленного листа (между осями, проходящими через ушки), по формуле (25), принимая средний радиус ушков  $r = 2,5 \text{ cm}$

$$S = 2 \sqrt{l^2 + \frac{4}{3}(\lambda - r)^2} = 2 \sqrt{46,7^2 + \frac{4}{3}(5 - 2,5)^2} = 93,6 \text{ cm}^1).$$

12) Фабричная хорда рессоры по формуле (29):

$$\begin{aligned} 2L &= 2 \sqrt{l^2 + \frac{4}{3}(\lambda - r)^2 - \frac{4}{3}(F - r)^2} = \\ &= 2 \sqrt{46,7^2 + \frac{4}{3}(5 - 2,5)^2 - \frac{4}{3}(9,2 - 2,5)^2} = 92,3 \text{ cm.} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Полная строительная длина коренного листа будет больше подсчитанной величины  $S$ , на величину, необходимую для загиба ушков.

13) Фабричный радиус кривизны; согласно (30):

$$R = \frac{3S^2 - 4(F - r)^2}{24(F - r)} = \frac{3 \cdot 93,6^2 - 4(9,2 - 2,5)^2}{24 \cdot (9,2 - 2,5)} = 162 \text{ см.}$$

14) Угол между крайними радиусами свободной рессоры, согласно (31):

$$2\varphi_0 = 57,4 \frac{S}{R} = 57,4 \cdot \frac{93,6}{162} = 33,1^\circ.$$

15) Длины отдельных листов в выпрямленном состоянии. Из очевидных соотношений:

$$S_1 = S \cdot \frac{n-1}{n},$$

$$S_2 = S \cdot \frac{n-2}{n},$$

.....

$$S_{n-1} = S \cdot \frac{1}{n},$$

где  $S_1$  — длина первого подкоренного листа,

$S_{n-1}$  — длина наименьшего листа. В нашем случае:

$$S_1 = 93,6 \cdot \frac{7-1}{7} = 80,4 \text{ см.}$$

$$S_2 = 93,6 \cdot \frac{7-2}{7} = 66,9 \text{ см.}$$

.....

$$S_6 = 93,6 \cdot \frac{1}{7} = 13,4 \text{ см.}$$

Проверим деформацию рассчитанной рессоры по более точным методам. Для этого воспользуемся формулами (17)–(20), выведенными выше, на стр. 12 и наконец применим метод, предложенный У. Тапака.

а) Определение деформации рессоры по формулам (17)–(20).

Упругая стрела прогиба рессоры определяется общим выражением (17):

$$f = \frac{Pl^3}{4EJ_{\max}} \varphi,$$

где коэффициент  $\varphi$ , учитывающий кривизну рессоры и наклон подвеса, может быть определен с большой точностью по формуле (18):

$$\varphi = A + B \operatorname{tg} \alpha,$$

при чем

$$A = \left(k + \frac{1}{k}\right) \left[ \arcsin \frac{2}{k + \frac{1}{k}} - k \right],$$

$$B = \left(k + \frac{1}{k}\right) \left[ 1 - \left(\frac{1}{2k} - \frac{k}{2}\right) \cdot \arcsin \frac{2}{k + \frac{1}{k}} \right],$$

$$k = \frac{\lambda}{l}.$$

В нашем случае:

$$k = \frac{5}{46,7} = 0,107,$$

$$A = \left(0,107 + \frac{1}{0,107}\right) \left[ \arcsin \frac{2}{0,107 + \frac{1}{0,107}} - 0,107 \right] = 1,002,$$

$$B = \left(0,107 + \frac{1}{0,107}\right) \left[ 1 - \left(\frac{1}{2 \cdot 0,107} - \frac{0,107}{2}\right) \cdot \arcsin \frac{2}{0,107 + \frac{1}{0,107}} \right] =$$

$$= 0,150,$$

$$\varphi = 1,002 + 0,150 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 1,152.$$

Момент инерции среднего сечения рессоры:

$$J_{\max} = h \frac{bh^3}{12} = 7 \cdot \frac{10 \cdot 1,3^3}{12} = 12,82 \text{ cm}^4.$$

Стрела прогиба:

$$f = \frac{4000 \cdot 46,7^3}{4 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 12,82} \cdot 1,152 = 4,35 \text{ cm},$$

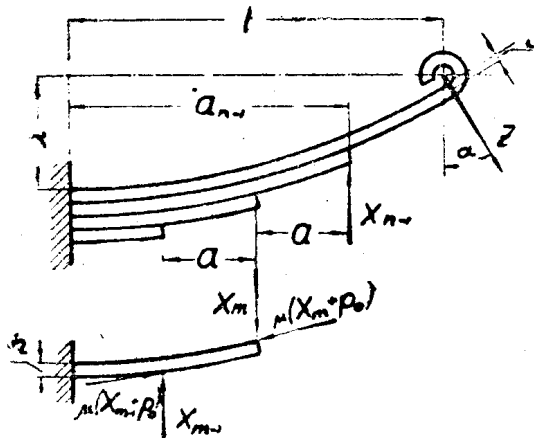
что отличается от величины  $f$  полученной в предыдущем расчете, на 4%.

Определение деформации рессоры по методу У. Такака.

У. Такака, в статье „Allgemeine Theorie der Blattfeder“<sup>1)</sup> предложил достаточно глубоко обоснованный метод определения де-

<sup>1)</sup> Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 2, 1922.

формаций листовой рессоры, дающий возможность учесть ее кривизну, давление и трение между листьями и пригодный также при различной толщине и форме отдельных листов.



Фиг. 8.

Предполагая, что все рессорные листы, первоначально изготовленные с различными радиусами кривизны и затем сложенные вместе и сжатые по середине хомутом, соприкасаются между собою только своими концами и серединой (под хомутом), Тапака рассматривает деформацию каждого из листов под действием следующих четырех усилий (фиг. 8).

$X_m$  — усилие, передаваемое от вышележащего листа,

$X_{m-1}$  — усилие, передаваемое на нижележащий лист,

$$\mu(X_m + p_0) \text{ и } \mu(X_{m-1} + p_0)$$

силы трения между рассматриваемым и соответственно верхним и нижним листом.

Здесь  $p_0$  — начальное давление между концами листов, получившееся при затягивании хомута.

Не излагая здесь всех его выводов и рассуждений и отсылая за деталями к оригиналу, приведем только окончательные выражения, необходимые при определении деформации рессоры.

При этом отметим, что записанные ниже выражения имеют, в указанной работе Тапака несколько другой вид, так как принятые им обозначения не совпадают с нашими.

Вертикальный прогиб  $n$ -го, коренного листа (или, что тоже самое, упругий прогиб рессоры  $f$ ), под действием наклонной, приложенной на конце его силы  $Z$  определяется выражением:

$$f = \frac{1}{6EJ_n} \left\{ \left[ 2l^3 \cos \alpha + \left( 3e + \frac{5}{2} \lambda \right) l^2 \sin \alpha \right] \cdot Z - (3l - a_{n-1}) \cdot a_{n-1}^2 X_{n-1} - \frac{1}{2} \mu \left[ 3h(2l - a_{n-1}) \cdot a_{n-1} + \lambda \frac{a_{n-1}^3}{l^2} (4l - a_{n-1}) \right] (X_{n-1} + p_0) \right\} \quad (33)$$

Здесь (фиг. 3 и 8):

$f$  — упругий прогиб рессоры,

$Z$  — усилие в наклонной подвеске,

$X_{n-1}$  — вертикальное усилие, действующее между коренным листом и концом подкоренного листа,



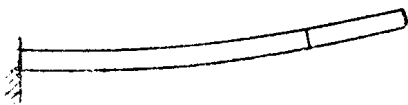
$$\left. \begin{aligned} \alpha_m &= (2m+1)(m-1) - \frac{3}{2} \mu \frac{h}{a} (m-1)^2, \\ \beta_m &= 4(m-1)^3 + 6F, \\ \gamma_m &= (2m-1)(m-2)^2 + \frac{3}{2} \mu \frac{h}{a} m(m-2), \\ \xi_m &= -\frac{3}{2} \mu \frac{h}{a} + 6N. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Здесь  $m$ —номер каждого листа, при чем первым ( $m=1$ ) считается наименьший лист рессоры.

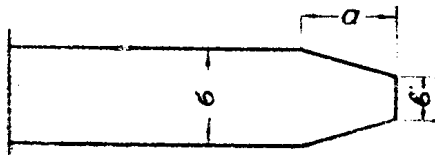
Коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{-1}{(1-\lambda')^2} \left[ \frac{\lambda'}{(1-\lambda')} + \frac{1}{2} \mu \frac{h}{a} \right] \left[ \lambda' \ln \lambda' + (1-\lambda') - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (1-\lambda')^2 \right] + \frac{1}{6}, \\ N &= \frac{1}{2} \mu \frac{h}{a} \frac{1}{(1-\lambda')^2} \left[ \lambda' \ln \lambda' + (1-\lambda') - \frac{1}{2} (1-\lambda')^2 \right]. \end{aligned} \right\} (37)$$

В этих выражениях коэффициент  $\lambda'$  учитывает форму концов рессорных листов. Согласно фиг. 9:



$$\lambda' = \frac{b'}{b}. \quad (38)$$



Фиг. 9.

В нашем примерном расчете усилие в подвеске:

$$Z = \frac{P}{2 \cos \alpha} = \frac{4000}{2 \cos \alpha 45^\circ} = 2830 \text{ kg},$$

число листов:

$$n = 7,$$

стрелка рессоры после деформации:

$$\lambda = 5 \text{ cm},$$

толщина листов:

$$h = 1,3 \text{ cm},$$

момент инерции сечения каждого листа:

$$J_n = \frac{bh^3}{12} = \frac{10 \cdot 1,3^3}{12} = 1,83 \text{ cm}^4.$$

Кроме того:

$$e \cong \frac{h}{2} = 0,7 \text{ cm},$$

$$a = \frac{l}{n} = \frac{46,7}{7} = 6,67 \text{ cm}.$$

Для выяснения влияния формы концов листов рессоры на величину ее деформации рассмотрим два крайних случая: 1) листы заострены по треугольнику:

$$b' = 0, \lambda' = 0.$$

2) листы обрезаны под прямым углом:

$$b' = b, \lambda' = 1.$$

При этом для упрощения расчетов пренебрежем трением между листами, т. е. допустим

$$\mu = 0.$$

Первый случай  $\lambda' = 0$ .

Из (37):

$$F = \frac{1}{6},$$

$$N = 0.$$

Для коренного листа, по формулам (35):

$$\alpha_7 = (2.7 + 1)(7 - 1)^2 \cos 45^\circ + \\ + \frac{1}{6.67} \left[ 3.0.7 + \frac{5}{2.7^2} (6.7^2 - 6^2) \right] (7 - 1)^2 \sin 45^\circ = 440.4,$$

$$\beta_7 = 4(7 - 1)^3 + 6 \cdot \frac{1}{6} = 865,$$

$$\gamma_7 = (2.7 - 1)(7 - 2)^2 = 325,$$

$$\xi_7 = 0.$$

Для подкоренного листа ( $m = 6$ ) по формулам (36):

$$\alpha_6 = (2.6 + 1)(6 - 1)^2 = 325,$$

$$\beta_6 = 4(6 - 1)^3 + 6 \cdot \frac{1}{6} = 501,$$

$$\gamma_6 = (2.6 - 1)(6 - 2)^2 = 176,$$

$$\xi_6 = 0.$$

Аналогично для всех остальных листов ( $m = 5 \div 2$ ) получим:

$$\alpha_5 = 176, \quad \beta_5 = 257, \quad \gamma_5 = 81,$$

$$\alpha_4 = 81, \quad \beta_4 = 109, \quad \gamma_4 = 28,$$

$$\alpha_3 = 28, \quad \beta_3 = 33, \quad \gamma_3 = 5,$$

$$\alpha_2 = 5, \quad \beta_2 = 5, \quad \gamma_2 = 0,$$

$$\xi_5 = \xi_4 = \xi_3 = \xi_2 = 0.$$

Составляем систему уравнений (34):

$$\begin{aligned} 440.4 Z - 865 X_6 + 325 X_5 &= 0, \\ 325 X_6 - 501 X_5 + 176 X_4 &= 0, \\ 176 X_5 - 257 X_4 + 81 X_3 &= 0, \\ 81 X_4 - 109 X_3 + 28 X_2 &= 0, \\ 28 X_3 - 33 X_2 + 5 X_1 &= 0, \\ 5 X_2 - 5 X_1 &= 0. \end{aligned}$$

Совместное решение этих уравнений дает:

$$X_6 = 0,816 \quad Z = 2310 \text{ kg.}$$

Половина хорды подкоренного листа:

$$a_{n-1} = a_6 = l - a = 46,7 - 6,67 \cong 40,0 \text{ cm.}$$

Упругая деформация рессоры по формуле (45):

$$f = \frac{1}{6.2,1.10^6.1,83} \left\{ \left[ 2.46,7^3 \cos 45^\circ + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 3.0,7 + \frac{5}{2}.5 \right).46,7^2. \sin 45^\circ \right] .2830 - \right. \\ \left. - (3.46,7 - 40,0).40,0^2.2310 \right\} = 4,40 \text{ cm.}$$

Второй случай  $\lambda' = 1$ .

Все коэффициенты  $\alpha$  и  $\gamma$ , как не зависящие от  $\lambda'$ , сохраняют свои прежние значения, подсчитанные выше, в первом случае ( $\lambda' = 0$ ). Коэффициент  $F$ , определенный формулой (37) при  $\lambda' = 1$  получает неопределенное выражение:

$$F = \frac{0}{0}.$$

Раскрытие неопределенности обычным методом дифференциального исчисления дает действительную величину:

$$F = 0.$$

Теперь по формулам (35) и (36)

$$\begin{aligned} \beta_7 &= 864, \\ \beta_6 &= 500, \\ \beta_5 &= 256, \\ \beta_4 &= 108, \\ \beta_3 &= 32, \\ \beta_2 &= 4. \end{aligned}$$

Кроме того, как и в предыдущем случае:

$$N = 0,$$

$$\xi_7 = \xi_6 = \xi_5 = \xi_4 = \xi_3 = \xi_2 = 0.$$

Составим систему уравнений (34):

$$\begin{aligned} 440,0 \, Z - 864 \, X_6 + 325 \, X_5 &= 0, \\ 325 \, X_6 - 500 \, X_5 + 176 \, X_4 &= 0, \\ 176 \, X_5 - 256 \, X_4 + 81 \, X_3 &= 0, \\ 81 \, X_4 - 108 \, X_3 + 28 \, X_2 &= 0, \\ 28 \, X_3 - 32 \, X_2 + 5 \, X_1 &= 0, \\ 5 \, X_2 - 4 \, X_1 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$X_6 = 0,826 \quad Z = 2340 \text{ kg.}$$

Упругая деформация рессоры по формуле (33):

$$f = \frac{1}{6 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1,83} \left\{ \left[ 2 \cdot 46,7^3 \cdot \cos 45^\circ + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( 3 \cdot 0,7 + \frac{5 \cdot 5}{2} \right) \cdot 46,7^2 \cdot \sin 45^\circ \right] \cdot 2830 - \right. \\ \left. - (3 \cdot 46,7 - 40,0) \cdot 40,0^2 \cdot 2340 \right\} = 4,20 \text{ cm.}$$

Для оценки степени точности изложенных выше методов определения деформации листовой рессоры сопоставим величины упругой стрелы прогиба  $f$ , вычисленные в примерном расчете. На основании приближенных формул (12) и (13) было получено

$$f = 4,18 \text{ cm.}$$

По более точным формулам (17)—(20):

$$f = 4,35 \text{ cm.}$$

Наконец по методу Тапакка, при острых концах листов (обрезанных по треугольнику):

$$f = 4,40 \text{ cm}$$

и при прямоугольных концах листов:

$$f = 4,20 \text{ cm.}$$

Действительное значение стрелы прогиба будет промежуточным между 4,20 и 4,40 cm, так как в практике обычно концы листов обрезаются по трапеции.

На основании приведенной сводки можно сделать следующие заключения:

- 1) Форма концов листов рессоры не оказывает существенного влияния на величину упругой деформации.
- 2) Приближенные формулы (12) и (13) обладают достаточной для обычных случаев практики, точностью.
- 3) В случае необходимости получения более точного значения для  $f$ , могут быть использованы формулы (17)—(20).
- 4) Метод Тапакка, требующий длительных вычислений, не имеет особых преимуществ для целей практики.

## 8. Трение в рессоре.

В изложенном выше примерном расчете совершенно не учтено влияние сил трения между листами. В формулах Тапакка, для

упрощения вычислений, были отброшены члены, содержащие коэффициент трения  $\mu$ .

При отсутствии трения упругая деформация рессоры должна изменяться пропорционально каждому изменению действующей на нее нагрузки. В действительности же, вследствие трения между листами, величина деформации зависит не только от величины нагрузки, но и от направления изменения последней.

При постепенном возрастании нагрузки от 0 до  $P$  часть силы  $P$  уравнивается силами трения и рессора получает деформацию  $f_1$ , меньшую, чем величина  $f$ , определенная выше. Отношение:

$$\varepsilon = \frac{f - f_1}{f},$$

может быть названо коэффициентом сопротивления трения в рессоре. Отсюда:

$$f_1 = f(1 - \varepsilon).$$

Обратно, при постепенном уменьшении нагрузки от некоторой величины  $P_{max}$  до  $P$ , часть внутренних сил упругости деформированной рессоры уравнивается трением между листами и упругая стрела прогиба:

$$f_1 = f(1 + \varepsilon).$$

Коэффициент  $\varepsilon$  возрастает с увеличением коэффициента трения  $\mu$ : начального давления между листами  $p_0$ , толщины  $h$  и числа листов  $n$  и уменьшается с увеличением нагрузки  $P$  и длины рессоры  $2l$ .

У. Тапакка дает следующую упрощенную формулу:

$$\varepsilon = \frac{\mu}{2a} \left[ h + \lambda \left( 1 - \frac{8}{3n} \right) \right] \left( 1 + \frac{p_0}{F} \right),$$

и указывает, кроме того, на менее точное выражение, полученное G. Marié:

$$\varepsilon = \frac{\mu (n - 1)h}{l}.$$

Для подсчета коэффициента сопротивлений трения  $\mu$  по этим формулам, необходимо знание величины коэффициента трения  $\mu$  между листами.

В зависимости от качества поверхности рессорных листов и смазки между ними, коэффициент  $\mu$  колеблется в очень широких пределах. Так, например, по данным Herdner'a<sup>1)</sup> можно счи-

<sup>1)</sup> В. Медель. Пособие для расчета и проектирования паровозов. 1929 г. Некоторые результаты экспериментального исследования листовых рессор изложены в статье Н. Stark. „Untersuchungen an Blattfedern“. Automobiltechnische Zeitschrift, 1932 г., № 6.

татъ коэффициентъ трения  $\mu = 0,80$  для новыхъ рессор и  $\mu = 0,20$  для рессор со смазкой между листами. У. Та пака в своихъ примерныхъ расчетахъ принимаетъ:

$$\mu = 0,30 \div 0,45.$$

Невозможность достаточно точной оценки величины  $\mu$  и начального давления  $p_0$ , понижаетъ надежность всехъ расчетовъ, учитывающихъ силы трения в рессоре.

При расчете рессор парашютныхъ устройствъ картина становится еще более сложной, такъ какъ кроме трения между листами должны быть учтены сопротивления трения во всехъ остальныхъ звеньяхъ парашютного механизма. Аналитический же подсчетъ этихъ сопротивленийъ очень сложенъ и не гарантируетъ даже минимальной точности.

Лишь дальнейшие экспериментальные исследования в этомъ направлении могутъ дать надежные результаты, характеризующие величину вредныхъ сопротивленийъ в парашютномъ механизме.

## II. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РЕАГИРОВАНИЯ РЕССОРЫ.

Описание конструкций и принциповъ действия различныхъ, применяемыхъ в практикѣ, типовъ парашютныхъ устройствъ не входитъ в задачи нашей работы. Отметимъ только наиболее существенные моменты, необходимые для дальнейшего изложения.

Действие большинства парашютныхъ механизмовъ основано на использовании потенциальной энергии деформированной пружины или рессоры.

При нормальной работѣ подъемнаго устройства рессора постоянно нагружена усилиемъ  $P$ , какъ правило, значительно меньшимъ, чемъ полный весъ поднимаемого груза. Это усилие, необходимое при расчетѣ рессоры на прочность, обычно принимается равнымъ от 0,8 до 0,9 веса порожней клетки<sup>1)</sup>.

Величина нагрузки  $P$  ограничивается особыми упорными приспособлениями, укрепленными в рамѣ клетки и не допускающими деформаций рессоры, большихъ расчетной упругой стрелы прогиба  $f$ .

Усилие, равное разности между весомъ груженой клетки и силой  $P$ , передается на подъемный канатъ уже помимо рессоры.

В моментъ разрыва подъемнаго каната рессора освобождается от нагрузки, начинаетъ двигаться в свое свободное положеніе и приводитъ в движеніе парашютный механизмъ.

Черезъ некоторый промежутокъ времени, необходимый для соотвѣтствующаго перемещенія всехъ звеньевъ парашютнаго механизма, тормазные ножи нажмутъ на проводники. Только с этого

<sup>1)</sup> См. напр. проф. Терпигорев. Рудничная доставка. 1929 г.

момента начнется процесс торможения, сводящийся к превращению кинетической энергии падающей клетки в работу трения и резания материала проводников.

Величина промежутка времени  $\tau$ , проходящего с момента разрыва каната до момента соприкосновения ножей парашютного устройства с проводниками, носит название времени реагирования рессоры.

Определение времени реагирования следует считать существенным моментом в проектировании парашютного механизма, так как величиной его обуславливается продолжительность свободного, равномерно-ускоренного падения оборвавшейся клетки и путь, проходимый ею до торможения.

С увеличением времени реагирования возрастает скорость и живая сила, которой обладает клетка в начале торможения, а также увеличивается динамическая нагрузка, вызываемая затормаживаемой клеткой в проводниках и растрелах.

### 1. Период собственных колебаний.

Выше было отмечено, что в момент обрыва каната, деформированная рессора начинает „выпрямляться“ и ее потенциальная энергия расходуется на приведение в движение парашютного механизма.

Заметим, что термин „выпрямляться“ не может быть применен буквально в случае рессоры, обычной нормальной конструкции, т. к. при уменьшении нагрузки такая рессора не выпрямляется, а искривляется еще больше. Ее кривизна увеличивается с уменьшением нагрузки.

Несмотря на это, термин „выпрямляться“ гораздо проще и нагляднее описывает явление, чем указание на изменение величины радиуса кривизны.

Если бы рессора была совершенно свободна и не связана с парашютным механизмом, то, подходя с постепенно возрастающей скоростью к своему среднему положению, вследствие инерции своей массы она перешла бы это среднее, свободное положение и начала выгибаться в противоположную сторону. Достигнув максимального искривления, рессора начала бы вновь выпрямляться и т. д. Рессора совершала бы свободные гармонические колебания.

При полном отсутствии каких либо сопротивлений амплитуда колебаний оставалась бы неизменной и равной  $f$ .

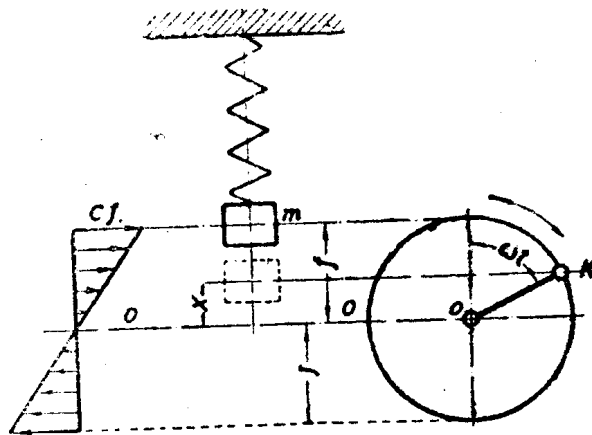
В действительности же рессора, связанная с парашютным механизмом, не сможет совершить ни одного полного колебания, так как, не достигнув еще среднего своего положения, она нажмет тормозные ножи на проводники.

При определении величины промежутка времени, прошедшего с момента разрыва каната до нажатия ножей на проводники (за это время рессора совершит часть одного полного колебания),



необходимо вычислить период свободных колебаний рессоры и связанного с ней парашютного механизма.

Для вывода основных уравнений колебательных движений листовой рессоры заменим ее простой спиральной пружиной, несущей на свободном конце некоторую массу  $m$  (фиг. 10). Такая замена не внесет погрешностей в дальнейшие выводы, если величины упругих характеристик пружины и массы  $m$  будут выбраны соответственно их действительным значениям в рессоре.



Фиг. 10.

Гибкость спиральной пружины должна быть равной гибкости  $\Delta$  листовой рессоры. Масса  $m$ , называемая приведенной, должна учесть не только величину масс всех подвижных звеньев парашютного механизма, но и степень участия их в колебательном движении. Метод подсчета ее будет дан ниже.

На фиг. 10 среднее, свободное положение массы  $m$  обозначено линией  $0-0$ . Под действием приложенной силы  $P$  пружина сожмется на величину  $f$  и масса  $m$  займет положение  $a-a$ .<sup>1)</sup>

В этом положении внешняя нагрузка  $P$  уравнивается упругой силой пружины, равной  $cf$ , где  $c$ —так называемая жесткость пружины, т. е. усилие, необходимое для деформации ее на 1 сантиметр.

Очевидно:

$$c = \frac{1000}{\Delta} \text{ kg/cm}, \quad (39)$$

если  $\Delta$ , согласно предыдущему измеряется в сантиметрах на тонну.

При внезапном прекращении действия силы  $P$  масса  $m$ , под действием выпрямляющейся пружины начнет двигаться вниз. Деформация пружины уменьшается и в некоторый момент времени  $t$  равна  $x$ . Величина  $x$  одновременно представляет собою вертикальное перемещение массы от ее положения равновесия  $0-0$ .

В момент времени  $t$  масса  $m$  движется со скоростью:

$$v = \frac{dx}{dt},$$

и ускорением:

$$j = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

<sup>1)</sup> На фиг. 10 прямая  $a-a$ , касательная к верхней половине окружности радиуса  $OK = f$  пропущена.

Сила инерции массы равна:

$$-m \cdot \frac{d^2x}{dt^2},$$

где знак минус показывает, что направление силы всегда противоположно направлению ускорения.

Для составления дифференциального уравнения движения применим принцип д'Аламбера.

На основании этого принципа уравнение движения может быть получено аналогично уравнениям статики. Необходимо только, кроме внешних и упругих сил, принять во внимание силы инерции движущихся масс. В нашем случае:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + cx = 0, \quad (40)$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m} x = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения дает:

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (41)$$

где:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (42)$$

Произвольные постоянные  $A$  и  $B$  должны быть определены таким образом, чтобы были удовлетворены начальные условия движения.

Принимая за начальный момент времени момент обрыва каната, имеем:

$$\text{при } t=0, \quad x=f, \quad \frac{dx}{dt} = 0.$$

При этих условиях из уравнения (53):

$$A=0, \quad B=f.$$

Вставим эти значения постоянных в общий интеграл (41):

$$x = f \cos \omega t, \quad (43)$$

или

$$x = f \cos \sqrt{\frac{c}{m}} t. \quad (44)$$

Из выражения (43) видно, что от прибавления к  $t$  величины:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (45)$$

значения  $x$  не меняются. За промежуток времени  $T$  масса  $m$  совершает полное колебание, возвращается в первоначальное положение и приобретает первоначальную скорость  $v=0$ . Величина  $T$  называется периодом собственных колебаний системы. Согласно (42) и (45):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}, \quad (46)$$

или на основании определения (51):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\Delta}{1000}}. \quad (47)$$

Последние выражения показывают, что период колебания (при отсутствии сопротивлений) не зависит от амплитуды колебания  $f$  и вполне определяется величиной массы  $m$  и упругими свойствами пружины.

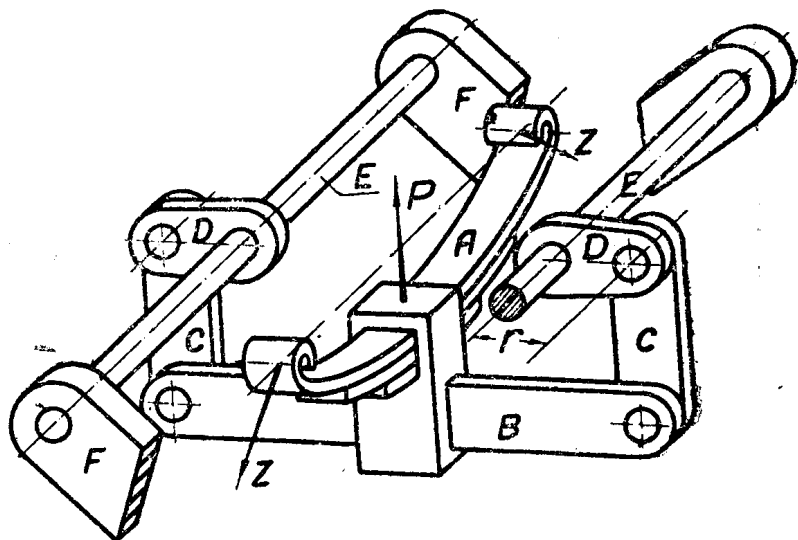
Представим себе вектор  $OK$  (фиг. 10), имеющий длину, равную амплитуде колебания  $f$  и вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega$  около точки  $O$ .

За время  $t$  вектор поворачивается на угол  $\omega t$  от вертикали. Из уравнения (43) очевидно, что каждое мгновенное положение колеблющейся массы  $m$  изображается проекцией конца вектора  $OK$  на вертикаль. При отсутствии вредных сопротивлений, свободное гармоническое колебание массы может быть представлено косинусоидой в координатах  $x$  и  $t$ .

Величина  $\omega$ , определяемая выражением (42) называется угловой скоростью гармонического колебания.

## 2. Приведение масс парашютного механизма.

Для вычисления периода колебаний  $T$  рессоры по формуле (47) необходимо знать величину массы  $m$ , участвующей в колебательном движении. В случае сложной колеблющейся системы, каковую мы имеем в парашютном механизме, следует массы всех движущихся деталей заменить одной, приведенной массой, динамически эквивалентной.



Фиг. 11.

Пользуясь методом Rayleigh'a назовем приведенной массой  $m$  всего парашютного механизма, такую фиктивную массу, приложенную в середине рессоры, кинетическая энергия которой в каждый момент времени равна кинетической энергии действительных колеблющихся масс<sup>1)</sup>.

Общий метод определения величины приведенной массы покажем на конкретном примере. Рассмотрим одну из конструкций парашютных механизмов, изображенную схематически на фиг. 11. Полагая, что устройство механизма достаточно ясно из чертежа, отметим только следующее.

Концы рессоры  $A$  и опоры валов  $E$  закреплены в корпусе клетки. Под действием натяжения подъемного каната, присоединенного к хомуту рессоры, последняя несколько изгибается вверх. При этом тормазные ножи  $F$  отходят от проводников.

При обрыве каната рессора „выпрямляется“, хомут движется вниз и ножи  $F$  поворачиваясь вместе с валами  $E$  врезаются в проводники. Клеть начинает постепенно останавливаться.

В нашем случае (фиг. 11) полная приведенная колеблющаяся масса складывается из следующих частей:

- 1) Приведенной массы самой рессоры —  $m_{A \text{ red.}}$
- 2) Действительной массы хомута рессоры и связанной с ним поперечины  $B$  —  $m_B$ .
- 3) Действительной массы двух вертикальных серег  $C$  —  $2m_c$ .
- 4) Приведенной массы двух вращающихся рычагов  $D$  —  $2m_{D \text{ red.}}$
- 5) Приведенной массы двух валов  $E$  —  $2m_{E \text{ red.}}$
- 6) Приведенной массы четырех ножей  $F$  —  $4m_{F \text{ red.}}$

Рассмотрим все эти пункты по отдельности.

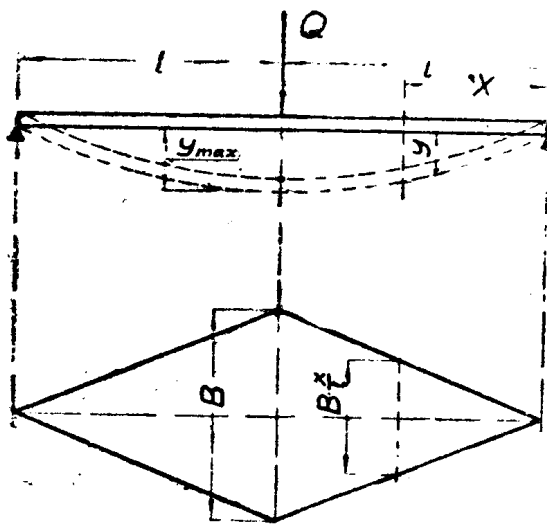
- 1) Определение приведенной массы рессоры  $m_{A \text{ red.}}$

Приведенной или редуцированной массой рессоры называем такую фиктивную массу  $m_{A \text{ red.}}$ , приложенную в середине рессоры, живая сила которой при колебательном движении равняется живой силе (кинетической энергии) действительной рессоры.

Рассматриваем рессору, как прямую балку постоянной высоты  $h$  и состоящую в плане из двух треугольников (фиг. 12). Максимальная ширина балки:

$$B = nb,$$

где, согласно принятым выше обозначениям,  $b$  — ширина каждого рессорного листа,  $n$  — число листов.



Фиг. 12.

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. 1931 г.

В середине балки приложим произвольную по величине, вертикальную силу  $Q$ . При этом балка изогнется по некоторой упругой кривой, уравнение которой может быть записано в общем виде:

$$y = f(x),$$

Для произвольного поперечного сечения  $x$  имеем:

$$M_x = \frac{Q}{2} x,$$

$$J_x = B \frac{x}{l} \frac{h^3}{12} = J_{\max} \frac{x}{l},$$

где максимальный момент инерции (среднего сечения):

$$J_{\max} = \frac{Bh^3}{12}.$$

Дифференциальное уравнение упругой кривой:

$$EJ_x y'' = M_x = \frac{Q}{2} x,$$

$$EJ_{\max} \cdot \frac{x}{l} y'' = \frac{Q}{2} x,$$

или:

$$EJ_{\max} \cdot y'' = \frac{Ql}{2}.$$

Интегрируем два раза:

$$EJ_{\max} \cdot y' = \frac{Ql}{2} x + C_1,$$

$$EJ_{\max} \cdot y = \frac{Qlx^2}{4} + C_1 x + C_2,$$

при:

$$x = 0, y = 0, C_2 = 0;$$

$$x = l, y' = 0, C_1 = -\frac{Ql^2}{2}.$$

Теперь:

$$EJ_{\max} \cdot y = \frac{Qlx^2}{4} - \frac{Ql^2 x}{2},$$

или меняя знаки (считая направление вниз положительным):

$$EJ_{\max} \cdot y = \frac{Ql^2 x}{2} - \frac{Qlx^2}{4}. \quad (48)$$

Максимальный прогиб в середине, при  $x = l$ :

$$EJ_{max} y_{max} = \frac{Ql^3}{2} - \frac{Ql^3}{4} = \frac{Ql^3}{4},$$

$$y_{max} = \frac{Ql^3}{4EJ_{max}}.$$

Из (48) общее уравнение упругой кривой:

$$y = \frac{Q \frac{l^2 x}{2} - Q \frac{lx^2}{4}}{EJ_{max}},$$

или

$$y = y_{max} \frac{\left( Q \frac{l^2 x}{2} - Q \frac{lx^2}{4} \right) \cdot 4EJ_{max}}{EJ_{max} \cdot Ql^3}.$$

Отсюда после сокращений:

$$y = y_{max} \frac{2lx - x^2}{l^2}. \quad (49)$$

Принимаем, что кривая прогибов балки при колебании имеет такую же форму, как и упругая кривая при статической нагрузке<sup>1)</sup>. Тогда скорости двух каких либо точек рессоры, в каждый данный момент относятся между собою так же, как соответствующие ординаты  $y$ .

Если  $v_{max}$  — мгновенная скорость колебания среднего сечения рессоры, то скорость колебания сечения, удаленного на расстояние  $x$  от опоры, равна:

$$v = v_{max} \frac{y}{y_{max}} = v_{max} \frac{2lx - x^2}{l^2}. \quad (50)$$

Двумя бесконечно близкими поперечными сечениями  $x$  и  $x + dx$  выделим из рессоры элементарный объем  $dV$ . Очевидно:

$$dV = B \frac{x}{l} h dx.$$

Выделенный элементарный объем имеет массу:

$$dm = \frac{\gamma}{g} dV = \frac{\gamma}{g} B \frac{x}{l} h dx,$$

<sup>1)</sup> Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле 1931 г.

и кинетическую энергию:

$$dm \cdot \frac{v^2}{2} = B \frac{h}{l} \frac{\gamma}{g} \frac{v^2}{2} x dx.$$

Здесь  $\gamma$ —удельный вес материала,  $g$ —ускорение силы тяжести.

Кинетическая энергия всей балки должна равняться кинетической энергии приведенной массы  $m_{A \text{ red.}}$ , приложенной в середине рессоры и двигающейся со скоростью  $v_{\max}$ . Поэтому:

$$m_{A \text{ red.}} \cdot \frac{v_{\max}^2}{2} = 2 \int_0^l \frac{v^2}{2} dm,$$

или

$$m_{A \text{ red.}} \cdot \frac{v_{\max}^2}{2} = 2 \int_0^l \frac{v^2}{2} \frac{Bh}{l} \frac{\gamma}{g} x dx.$$

Подставляем сюда значения для  $v$  из формулы (50) и выносим постоянные величины за знак интеграла. После сокращения на  $v_{\max}^2$  получаем:

$$m_{A \text{ red.}} = \frac{2Bh\gamma}{l^2 g} \int_0^l (2lx - x^2)^2 \cdot x dx.$$

Интегрирование и подстановка пределов дает:

$$m_{A \text{ red.}} = \frac{11}{15} \frac{Bh\gamma l}{g}. \quad (51)$$

Но вес всей рессоры:

$$G_A = 2 \frac{Bl}{2} h\gamma = Blh\gamma = nbhl\gamma. \quad (52)$$

Следовательно:

$$m_{A \text{ red.}} = \frac{11}{15} \frac{G_A}{g}, \quad (53)$$

т. е. приведенная масса рессоры составляет 11/15 от ее действительной массы.

2, 3) Определение масс  $m_B$  и  $m_C$ .

Рессорный хомут, поперечина  $B$  и серьги  $C$  при колебании двигаются с той же скоростью  $v_{\max}$ . Их приведенная масса равна действительной массе:

$$m_B + m_C = \frac{G_B + 2G_C}{g}.$$

Веса этих деталей  $G_B$  и  $G_C$  вычисляются непосредственно по размерам чертежа или, при уже построенном парашютном механизме, могут быть определены взвешиванием.

4) Приведение массы рычагов  $D$ .  
Обозначим (фиг. 13):

$J_D$ —момент инерции массы рычага относительно оси вращения  $E—E$ ,

$\omega$ —мгновенная угловая скорость рычага,

$r_D$ —радиус (длина) рычага.

При взаимно перпендикулярном положении рычага  $D$  и серьги  $C$  точка  $a$  имеет скорость  $v_{max}$ , равную скорости средней точки рессоры (точки приведения).

Приведенная масса рычага  $m_{D \text{ red.}}$  определится из необходимого равенства:

$$m_{D \text{ red.}} \cdot \frac{v_{max}^2}{2} = \frac{1}{2} J_D \omega^2,$$

или:

$$m_{D \text{ red.}} \cdot \frac{r_D^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} J_D \omega^2,$$

так как скорость точки  $a$ :

Отсюда:

$$v_{max} = r_D \omega.$$

$$m_{D \text{ red.}} = \frac{J_D}{r_D^2}. \quad (54)$$

Момент инерции массы рычага  $J_D$  можно определить по размерам чертежа, пользуясь обычными формулами для моментов инерции масс<sup>1)</sup>. Для выполненных рычагов величина  $J_D$  может быть найдена опытным путем. Подвешиваем рычаг на призме, на оси  $EE$  и измеряем время  $T$  в секундах, необходимое для одного полного (двойного) колебания. Тогда на основании теории физического маятника:

$$J_D = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot G_D e \text{ kg cm sec}^2 \quad (55)$$

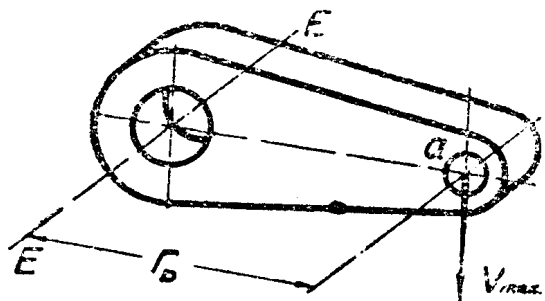
где  $G_D$ —вес рычага в кгр.,  $e$ —расстояние центра тяжести хомута от оси вращения  $E—E$ , в сантиметрах<sup>1)</sup>.

5) Приведение массы вала  $E$ .  
Каждый вал  $E$  представляет собою прямой круглый цилиндр радиуса  $R$ . Момент инерции вала относительно оси вращения:

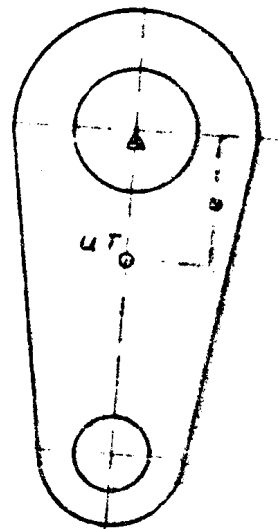
$$J_E = \frac{G_E R^2}{2g}, \quad (56)$$

<sup>1)</sup> Hütte, т. I, изд. 13, стр. 248.

<sup>1)</sup> См. напр. Г. Дуббель. Справочник по машиностроению т. I.



Фиг. 13.



Фиг. 14.



где  $G_E$ —вес вала. Приведенная масса (аналогично приведению массы рычага:

$$m_{E \text{ red}} = \frac{J_E}{r_D^2}. \quad (57)$$

Здесь  $r_D$ , как и выше, обозначает длину рычага  $D$ .

6) Приведение массы кулаков  $F$ .

Момент инерции  $J_F$  каждого ножа относительно оси  $E—E$ , определяется вычислением по размерам на чертеже, или качанием на призме, аналогично сказанному выше в отношении рычагов  $D$ .

Приведенная масса каждого ножа (кулака):

$$m_{F \text{ red}} = \frac{J_F}{r_D^2},$$

где  $r_D$ —имеет прежнее значение.

Определив приведенные массы всех звеньев парашютного механизма, можно вычислить период собственных колебаний рессоры  $T$  по формуле (59):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\Delta}{1000}}.$$

Для рассмотренной нами схемы парашютного механизма (фиг. 11) необходимо вместо  $m$  вставить сюда величину:

$$m = m_{A \text{ red}} + m_B + 2m_C + 2m_{D \text{ red}} + 2m_{E \text{ red}} + 4m_{F \text{ red}}.$$

Гибкость рессоры  $\Delta$  измеряется в формуле (59)<sup>2</sup> в сантиметрах на тонну.

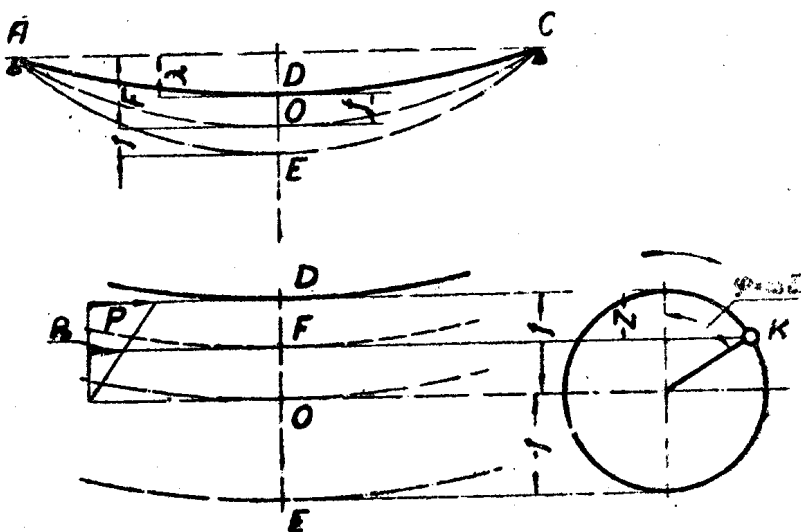
### 3. Определение времени реагирования рессоры.

В свободном состоянии рессоры, коренной лист ее изогнут по дуге круга  $AOC$  (фиг. 15). При нормальной работе клетки коренной лист имеет форму  $ADC$  (если для простоты чертежа пренебречь перемещениями концов рессоры при ее деформации). При этом рессора имеет стрелку:

$$\lambda = F - f$$

и упругую деформацию (стрелку прогиба)

$$f = P\Delta.$$



Фиг. 15.

В момент обрыва каната рессора начинает колебаться от положения  $ADC$  до  $AEC$ , через свое нулевое (свободное) положение  $AOC$ .

При отсутствии сопротивлений амплитуда колебания равна  $f$ , т. е.

$$DO = OE = f.$$

Движение рессоры, начавшееся в момент прекращения действия силы  $P$  будет продолжаться до тех пор, пока средняя точка  $D$  рессоры не придет в некоторую точку  $F$ , лежащую между  $D$  и  $O$ . В этот момент тормозные ножи нажмут на проводники и движение рессоры закончится.

Промежуток времени, необходимый для прохождения средним сечением рессоры пути:

$$DF = z,$$

очевидно и представляет собою искомое время реагирования  $\tau$  (см. стр. 32).

В положении  $F$  рессора должна еще иметь некоторую определенную затяжку  $P_0$ , необходимую для создания достаточного давления тормозных ножей (кулаков), на проводники.

На основании закона пропорциональности между нагрузкой и деформацией можно написать:

$$\frac{P_0}{P} = \frac{f - z}{f}. \quad (58)$$

Это соотношение позволяет определить необходимое рабочее перемещение рессоры  $z$  по выбранной затяжке  $P_0$  или обратно, получившееся  $P_0$  при принятом  $z$ .

Всегда должно быть:

$$P_0 < P; z < f.$$

Величина  $z$ , при выбранных соотношениях размеров парашютного механизма, определяет форму и угол заклинения тормозных кулаков (ножей).

Выше, на стр. 35 было выяснено, что каждое мгновенное положение гармонически колеблющейся массы изображается проекцией конца вращающегося вектора  $OK$  на вертикаль. Длина вектора равна амплитуде колебания (фиг. 16):

$$OK = f.$$

Угловая скорость вращения вектора, согласно (45):

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{m\Delta}}. \quad (59)$$

За время реагирования рессоры  $\tau$  вектор повернется на некоторый угол  $\varphi = \omega\tau$  и точка  $D$  придет в  $F$ . Согласно чертежу:

$$DF = z = f - f \cos \varphi.$$

Отсюда:

$$\cos \varphi = \frac{f - z}{f} = 1 - \frac{z}{f},$$

$$\varphi = \arccos \left( 1 - \frac{z}{f} \right).$$

Время реагирования рессоры:

$$\tau = \frac{\varphi}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{c}} \arccos \left( 1 - \frac{z}{f} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{m\Delta}{1000}} \arccos \left( 1 - \frac{z}{f} \right). \quad (60)$$

Пользуясь выражением (47) и (58) получаем окончательно:

$$\tau = \frac{T}{2\pi} \arccos \left( \frac{P_0}{P} \right), \quad (61)$$

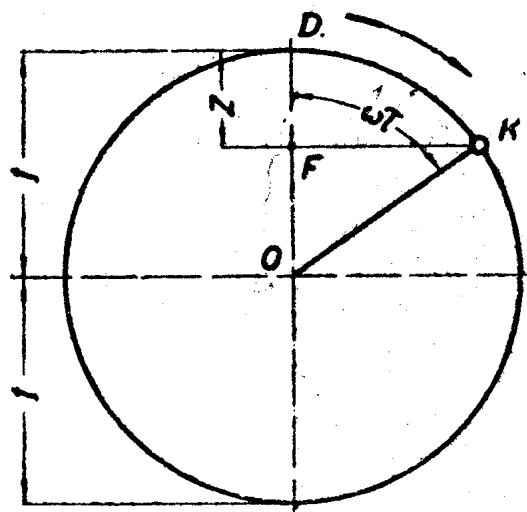
или

$$\tau = \sqrt{\frac{m\Delta}{1000}} \arccos \left( \frac{P_0}{P} \right). \quad (62)$$

Из полученных формул можно видеть, что уменьшение рабочего перемещения рессоры  $z$  уменьшает время реагирования, но делает работу парашюта более жесткой.

В заключение отметим, что все вышеизложенные результаты были получены в предположении отсутствия сил трения в парашютном механизме. Предполагалось, что с момента обрыва каната рессора движется по законам свободных гармонических колебаний. В действительности сопротивление трения уменьшает амплитуду колебаний. Движение становится затухающим. Время реагирования фактически получается несколько больше, чем дают формулы (61) и (62).

Несмотря на это применение указанных формул следует считать целесообразным, так как подсчет сил трения в парашютном механизме не может быть осуществлен с достаточной точностью.



Фиг. 3.

## СХЕМА РАСЧЕТА ЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ.

### 1. Определение размеров рессоры.

Обозначения:

$P$ —расчетная нагрузка на рессору в  $kg$ ,  
 $2l$ —хорда рессоры в деформированном состоянии в  $cm$ ,  
 $2L$ —фабричная хорда рессоры в  $cm$ ,  
 $S$ —длина выпрямленной рессоры в  $cm$ ,  
 $f$ —упругая стрела прогиба рессоры в  $cm$  под действием силы  $P$ ,  
 $\lambda$ —стрелка рессоры в деформированном состоянии в  $cm$ ,  
 $F=f+\lambda$ —фабричная стрелка рессоры в  $cm$ ,  
 $R$ —фабричный радиус кривизны коренного листа рессоры в  $cm$ ,  
 $r$ —средний радиус ушков коренного листа,  
 $2\phi_0$ —угол, составленный крайними радиусами рессоры в свободном состоянии,  
 $n$ —число листов рессоры,  
 $b$ —ширина листов рессоры в  $cm$ ,  
 $h$ —толщина листов рессоры в сантиметрах,  
 $R_b$ —допускаемое напряжение изгиба в  $kg/cm^2$ ,  
 $\alpha$ —угол наклона рессорных подвесок к вертикали,  
 $\Delta$ —гибкость рессоры в  $cm/tn$ , т. е. прогиб ее в  $cm$  под действием силы в 1 тонну.

Для расчета дано:

$P$ —усилие, действующее на рессору в  $kg$ ,  
 $\Delta$ —гибкость рессоры в  $cm/tn$  (из условия получения необходимой величины деформации  $f=P\Delta$ , выбираемой конструктивно, соответственно всей схеме парашютного механизма),  
 $R_b$ —допускаемое напряжение изгиба в  $kg/cm^2$ ,  
 $b \times h$ —профиль сечения листов рессоры (по ОСТ—28), (руководствуясь соображениями: чем большая гибкость требуется от рессоры, тем тоньше должны быть выбраны листы для ее изготовления),

$\alpha$ —угол наклона подвесок (чем больше  $\alpha$ , тем больше гибкость данной рессоры),

$r$ —средний радиус ушков.

А. Определение  $l$  и  $n$  (фиг. 17).

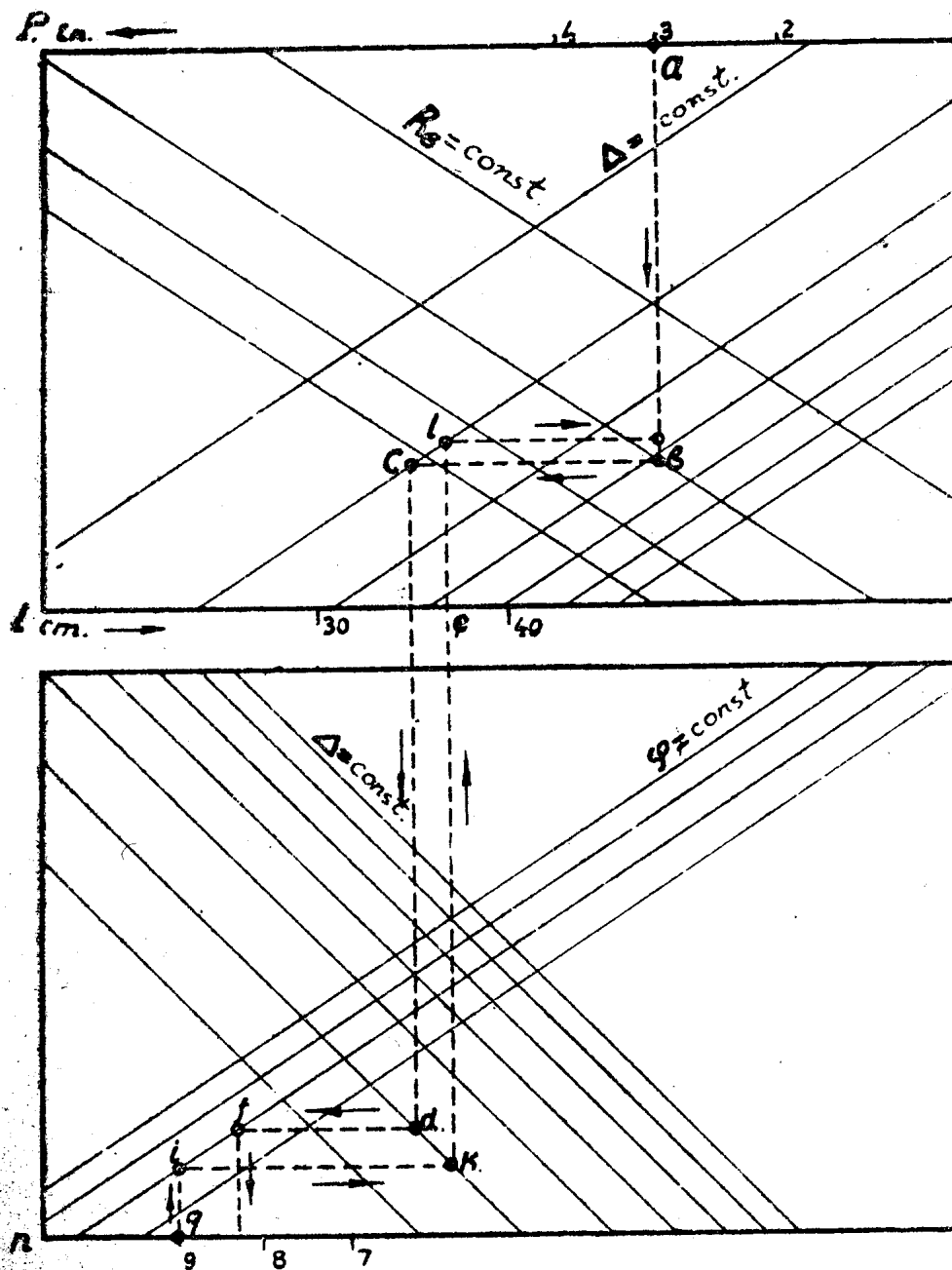
1. Берем номограмму для выбранного профиля  $b \times h$  и на верхней шкале (нагрузок) отмечаем расчетную нагрузку  $P$  (точка  $a$ ).

2. Через полученную точку проводим вертикаль до пересечения с линией выбранного  $R_b$  в точке  $b$ .

3. Через  $b$  ведем горизонталь до пересечения с линией выбранной гибкости  $\Delta$  в точке  $c$ .

4. Через  $c$  проводим вертикаль  $cd$  вниз, во вторую половину номограммы, до линии той же  $\Delta$ .

5. Линия  $cd$  пересекает шкалу длин  $l$  в точке  $e$ . Эта точка



Фиг. 17.

приблизительную длину половины хорды деформированной

выбираем  $\lambda$  (стрелку рессоры в деформированном состоянии) и подсчитываем коэффициент  $\varphi$ :

$$\varphi = \left(1 + \frac{\lambda}{l} \operatorname{tg} \alpha\right).$$

(Для получения большей точности, коэффициент  $\varphi$  может быть подсчитан по формулам 18—20).

7. Через точку  $d$  ведем горизонталь до пересечения с линией подсчитанного  $\varphi$  в точке  $f$ .

8. Вертикаль через  $f$  дает на нижней шкале необходимое число листов рессоры  $n$ .

9. Полученное число округляем до ближайшего целого (в большую или меньшую сторону). Получаем точку  $g$ .

10. Через  $g$  ведем вертикаль до пересечения с линией прежнего  $\varphi$  в точке  $i$ .

11. Через  $i$  ведем горизонталь  $ik$  до прежнего  $\Delta$ .

12. Из  $k$  ведем вертикаль  $kl$  до того же  $\Delta$ .

13. Вертикаль  $kl$  отсекает на шкале длин действительную величину полухорды деформированной рессоры  $l$ .

14. Через точку  $l$  ведем горизонталь. Пересечение ее с вертикалью  $ab$  дает действительное напряжение  $\sigma_{max}$  изгиба в рессоре.

15. Максимальное напряжение получается в коренном листе рессоры (вследствие добавочного растяжения его горизонтальной составляющей реакции наклонной рессорной подвески):

$$\sigma'_{max} = \sigma_{max} + \frac{P \operatorname{tg} \alpha}{bh} \text{ кг/см}^2.$$

16. Зная  $f$  и  $\lambda$  определяем фабричную стрелку рессоры:

$$F = f + \lambda.$$

## В. Определение строительных размеров рессоры.

17. Длина выпрямленной рессоры<sup>1)</sup>:

$$S = 2 \sqrt{l^2 + \frac{4}{3}(\lambda - r)^2}.$$

18. Фабричная хорда рессоры:

$$2L = 2 \sqrt{\frac{S^2}{4} - \frac{4}{3}(F - r)^2}.$$

19. Фабричный радиус коренного листа рессоры:

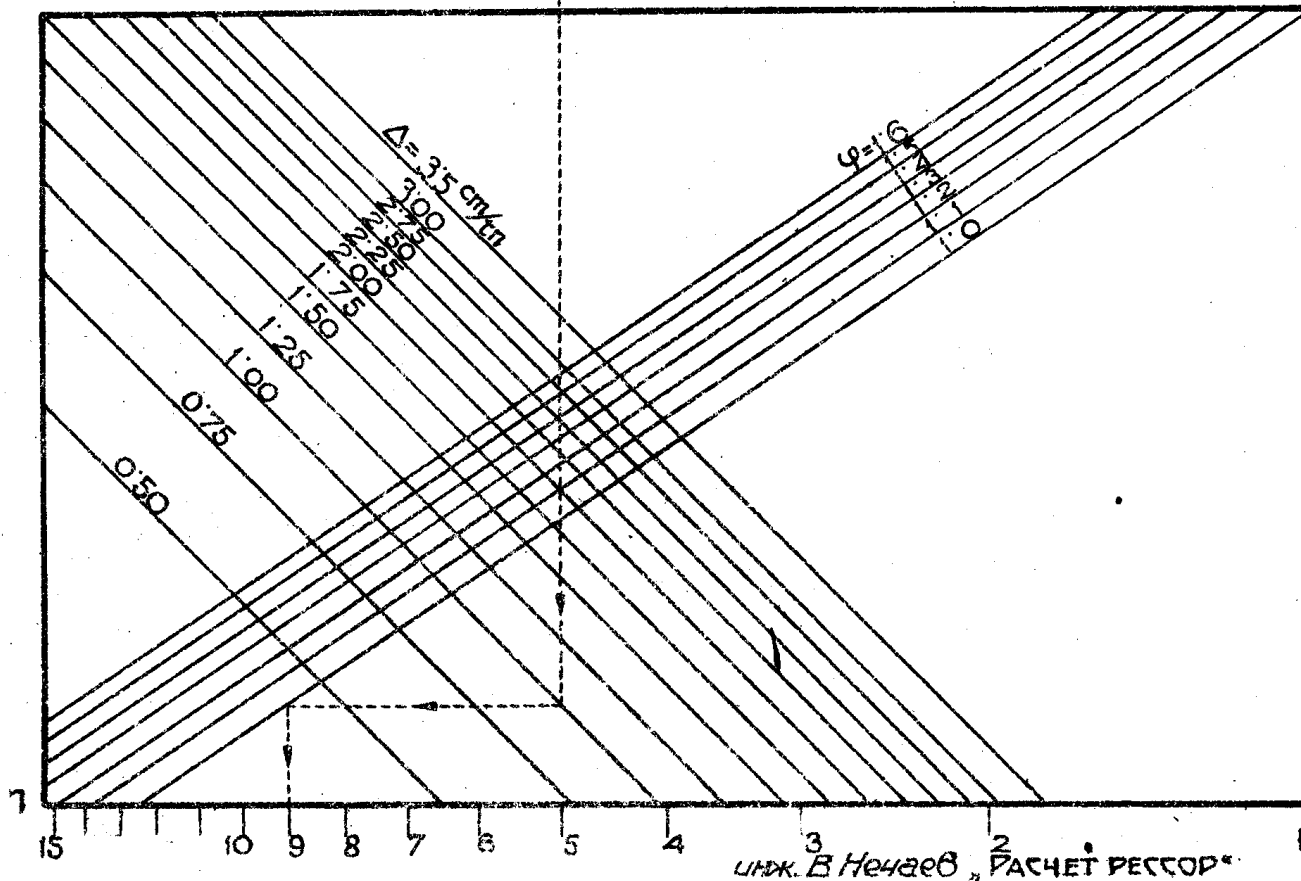
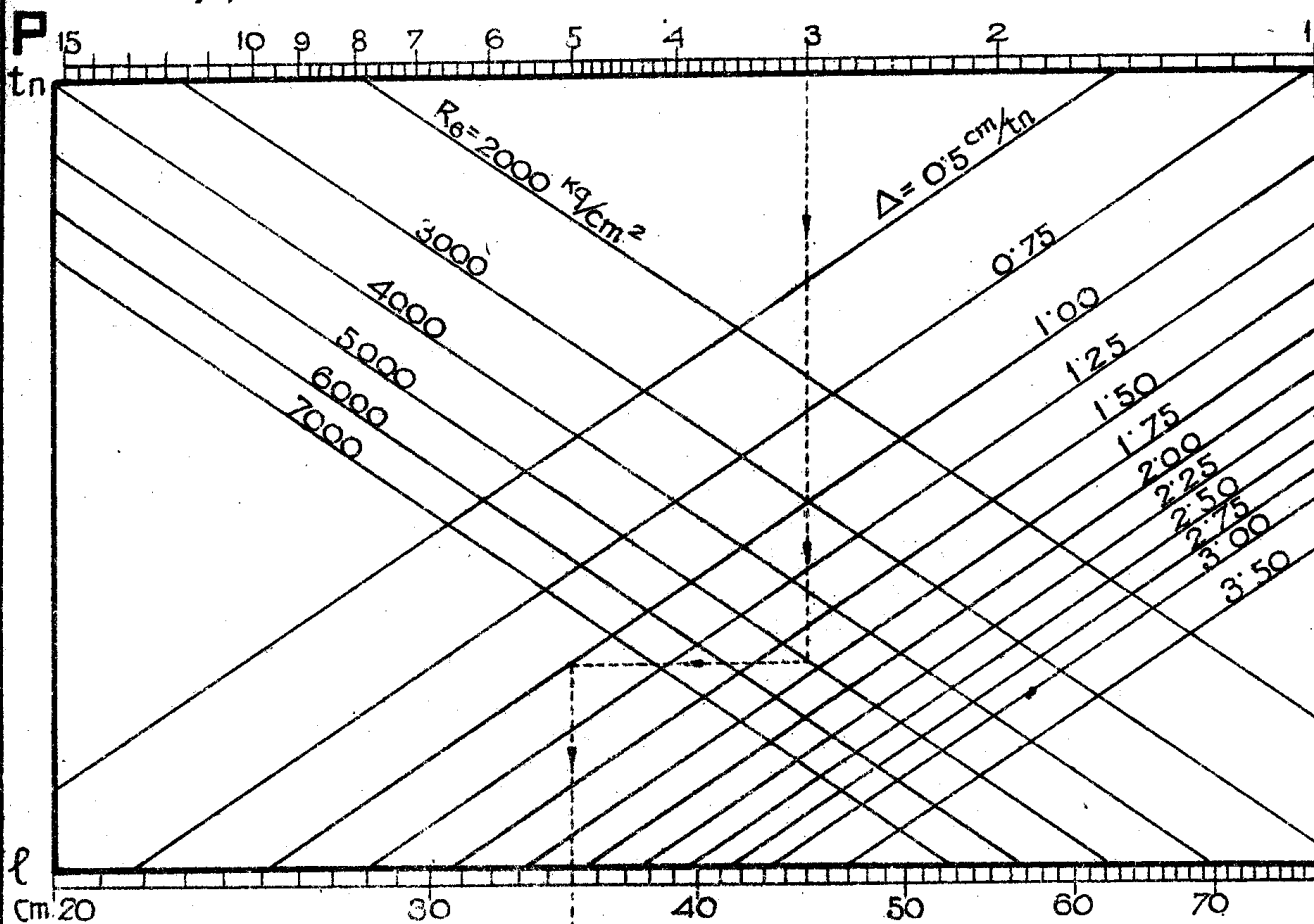
$$R = \frac{3 S^2 - 4 (F - r)^2}{24 (F - r)}.$$

<sup>1)</sup> Полная строительная длина коренного листа будет больше величины  $S$ , подсчитываемой из этой формулы, на величину, необходимую для загиба ушков.

# НОМОГРАММА

76×9.5

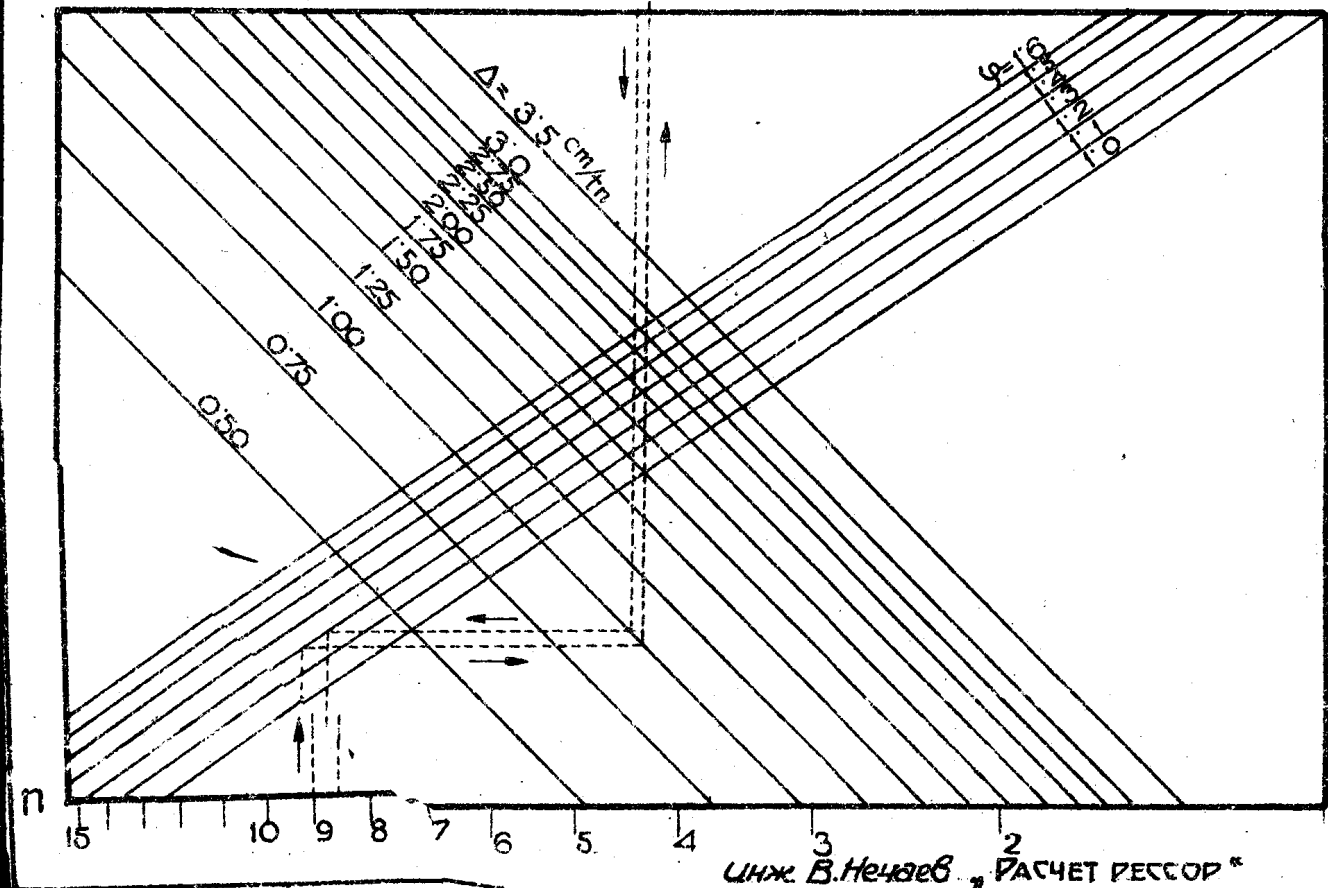
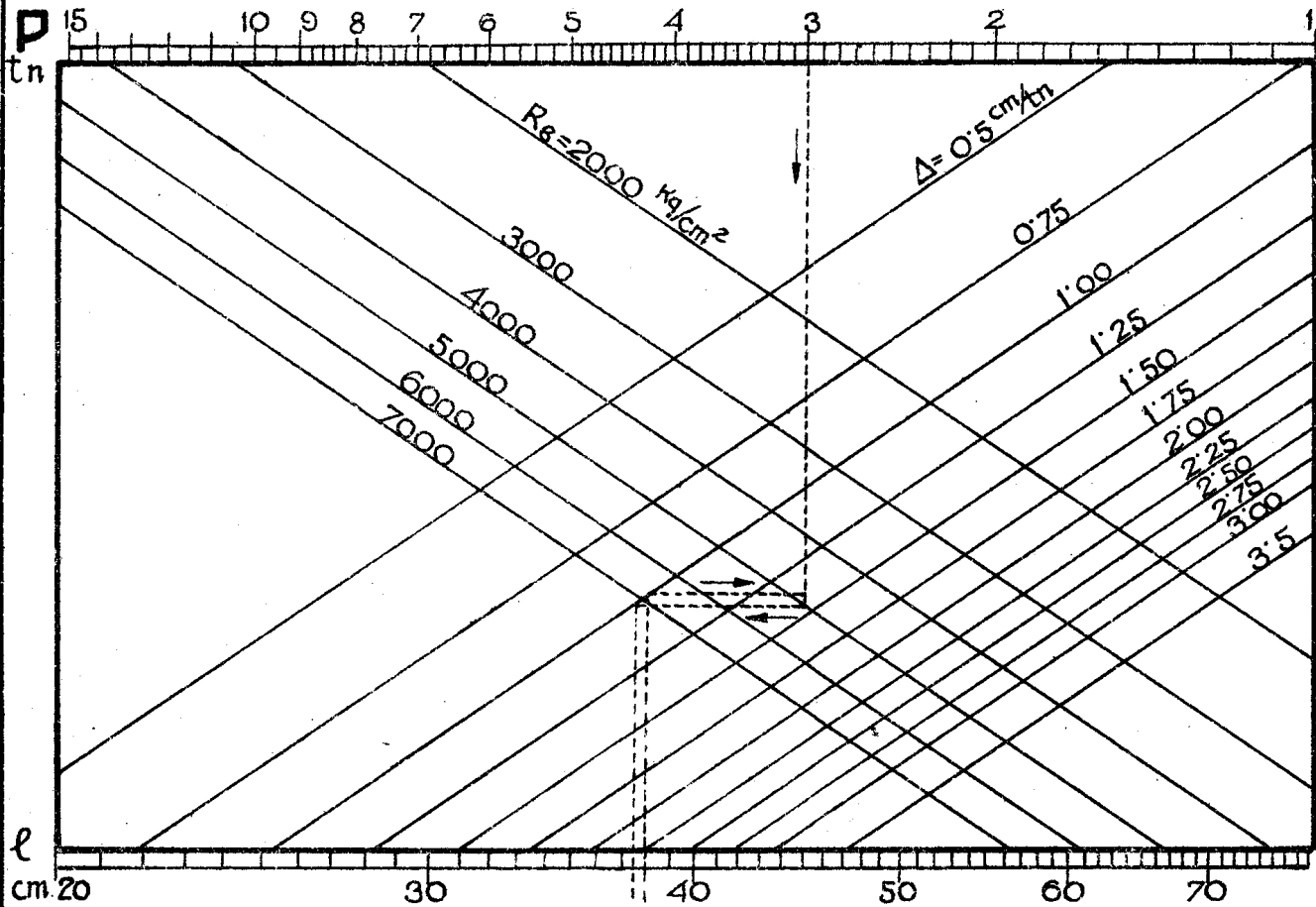
ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИСТОВЫХ РЕССОР.



# НОМОГРАММА

76x11.

для расчета листовых рессор.

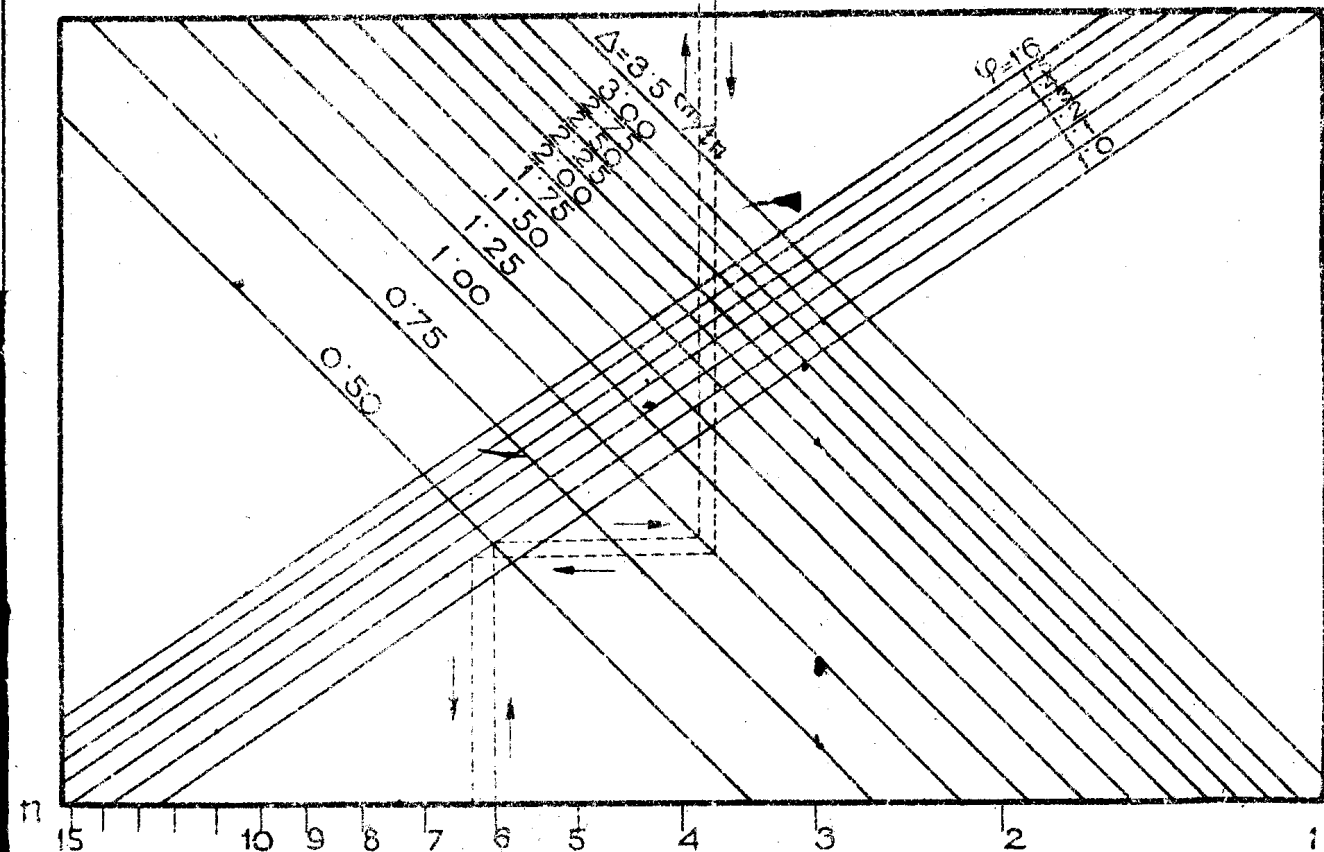
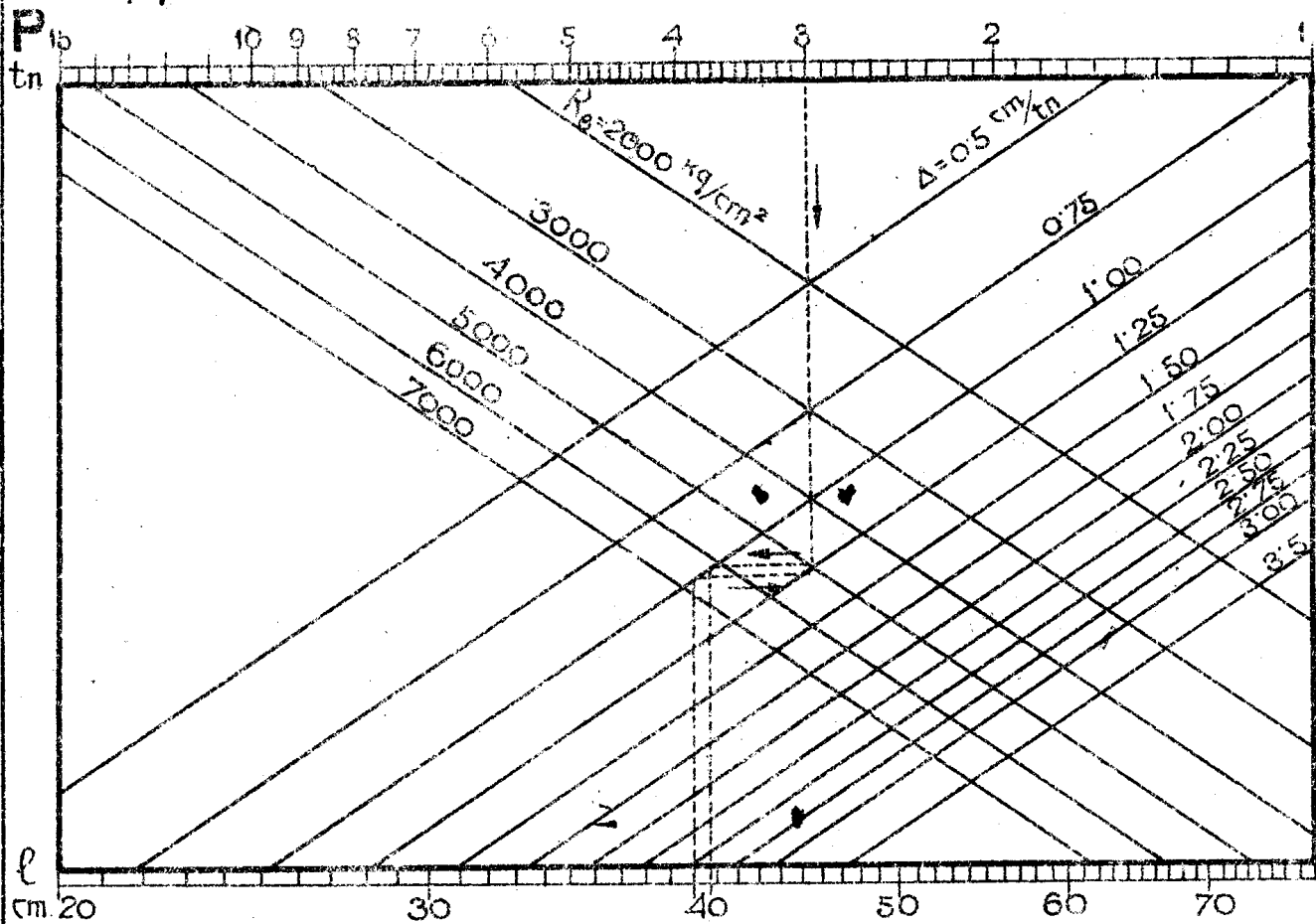




# НОМОГРАММА

76 × 13

ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИСТОВЫХ РЕССОР

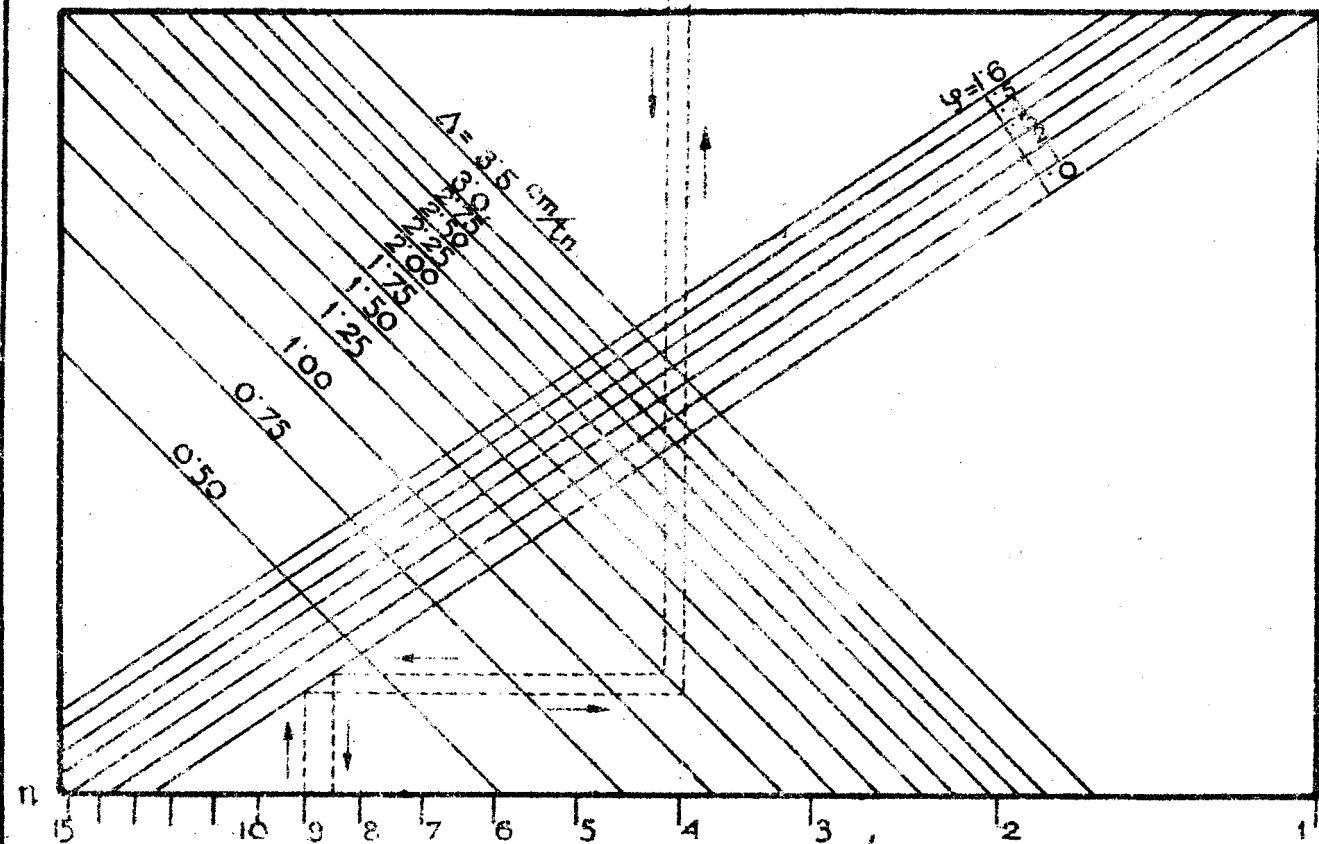
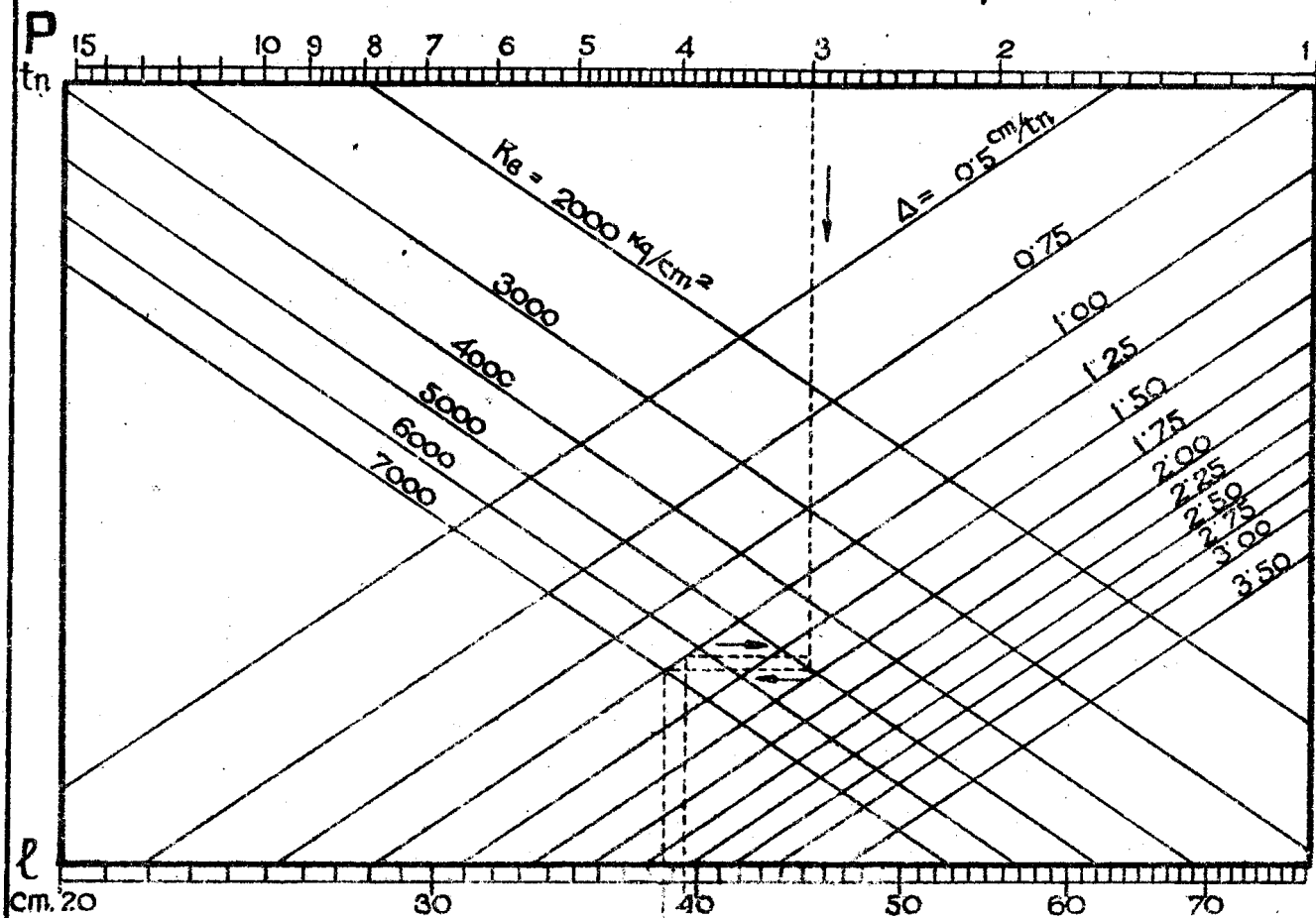


инж. В. Нечаев. РАСЧЕТ РЕССОР

# НОМОГРАММА

89x95

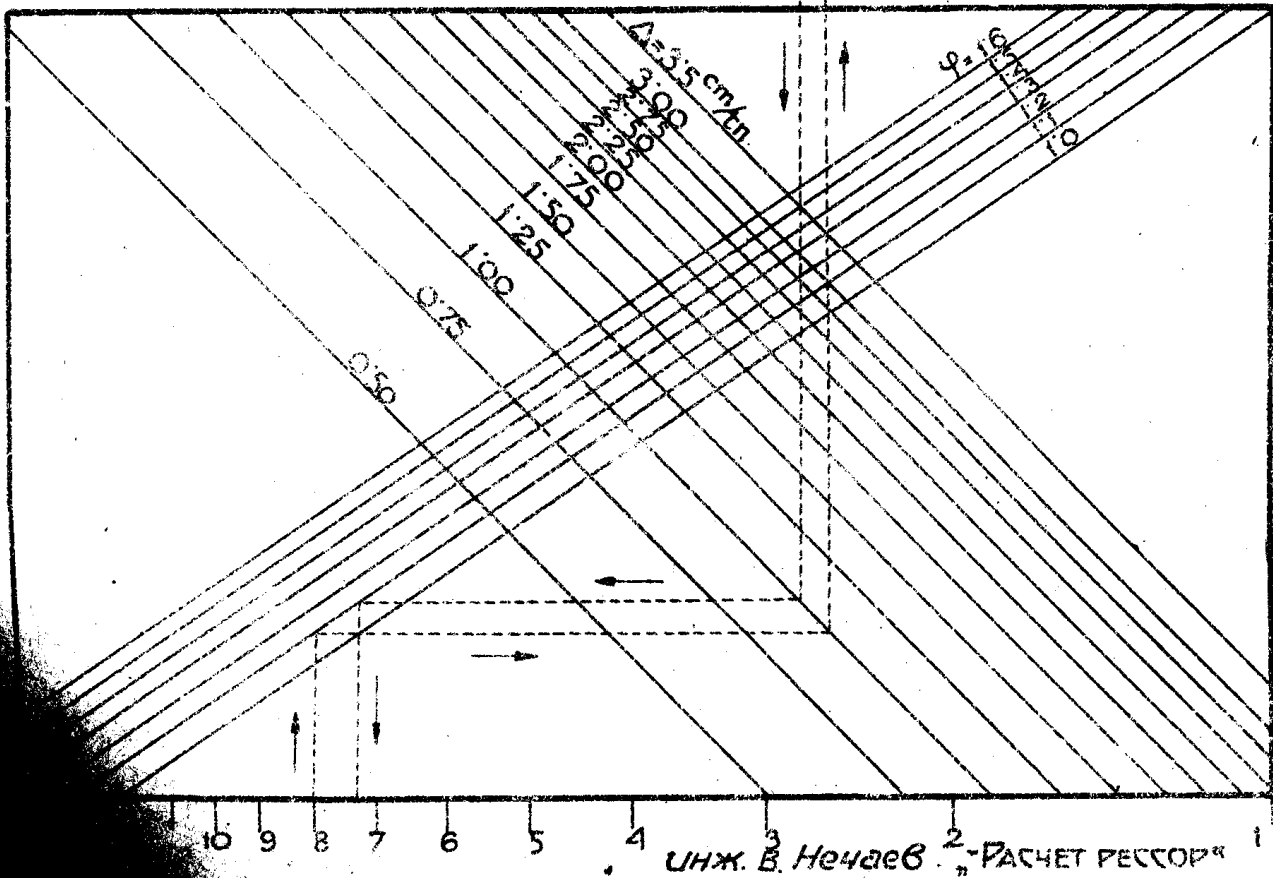
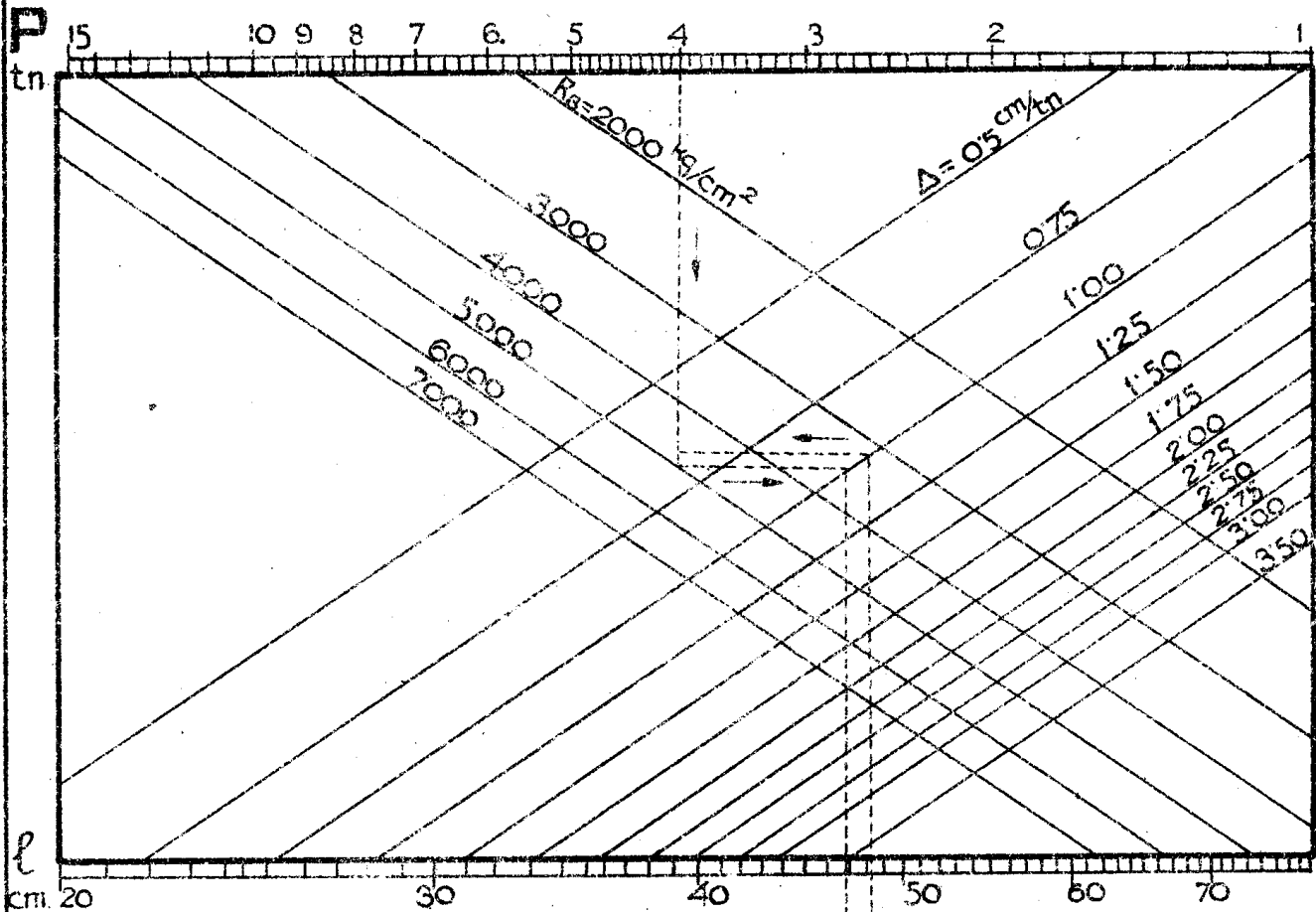
ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИСТОВЫХ РЕССОР



# НОМОГРАММА

100 × 13

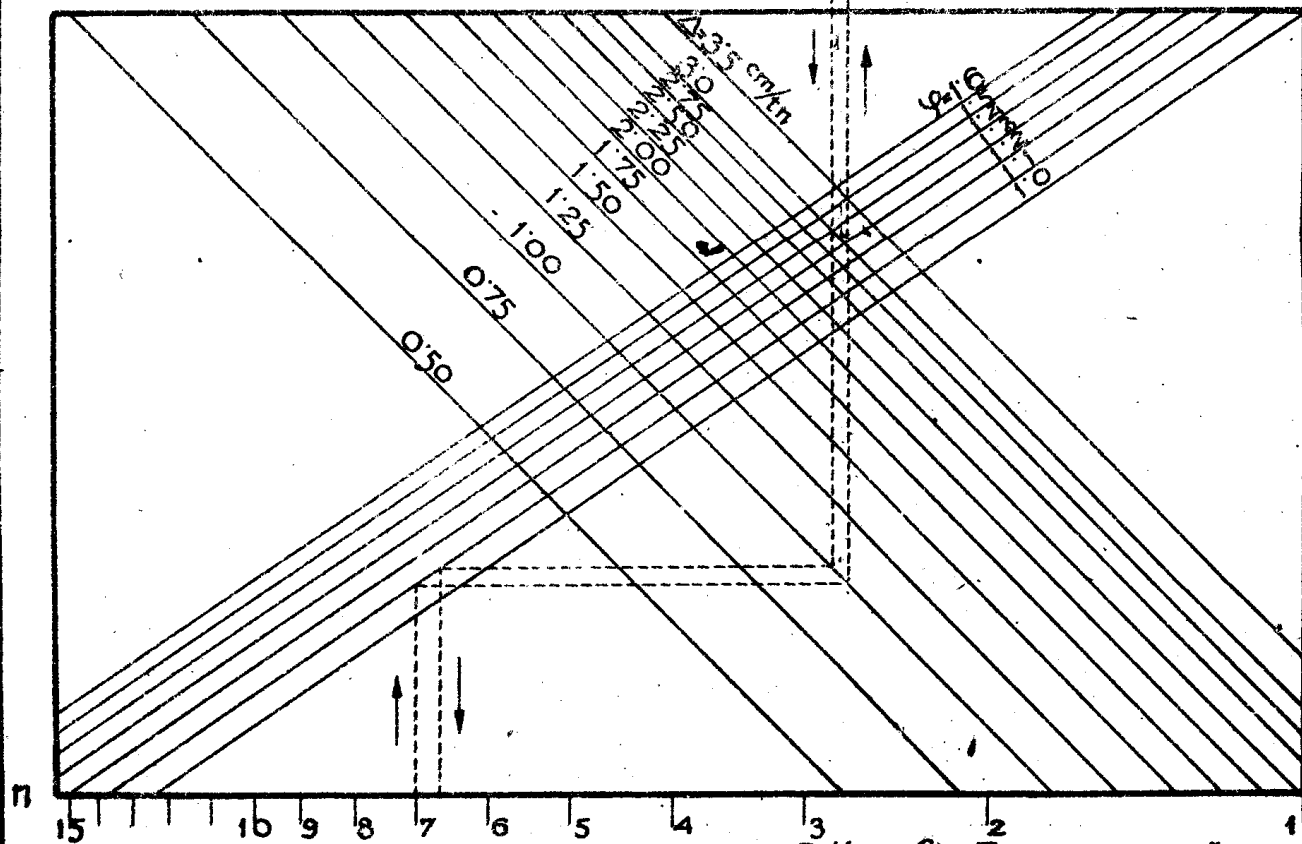
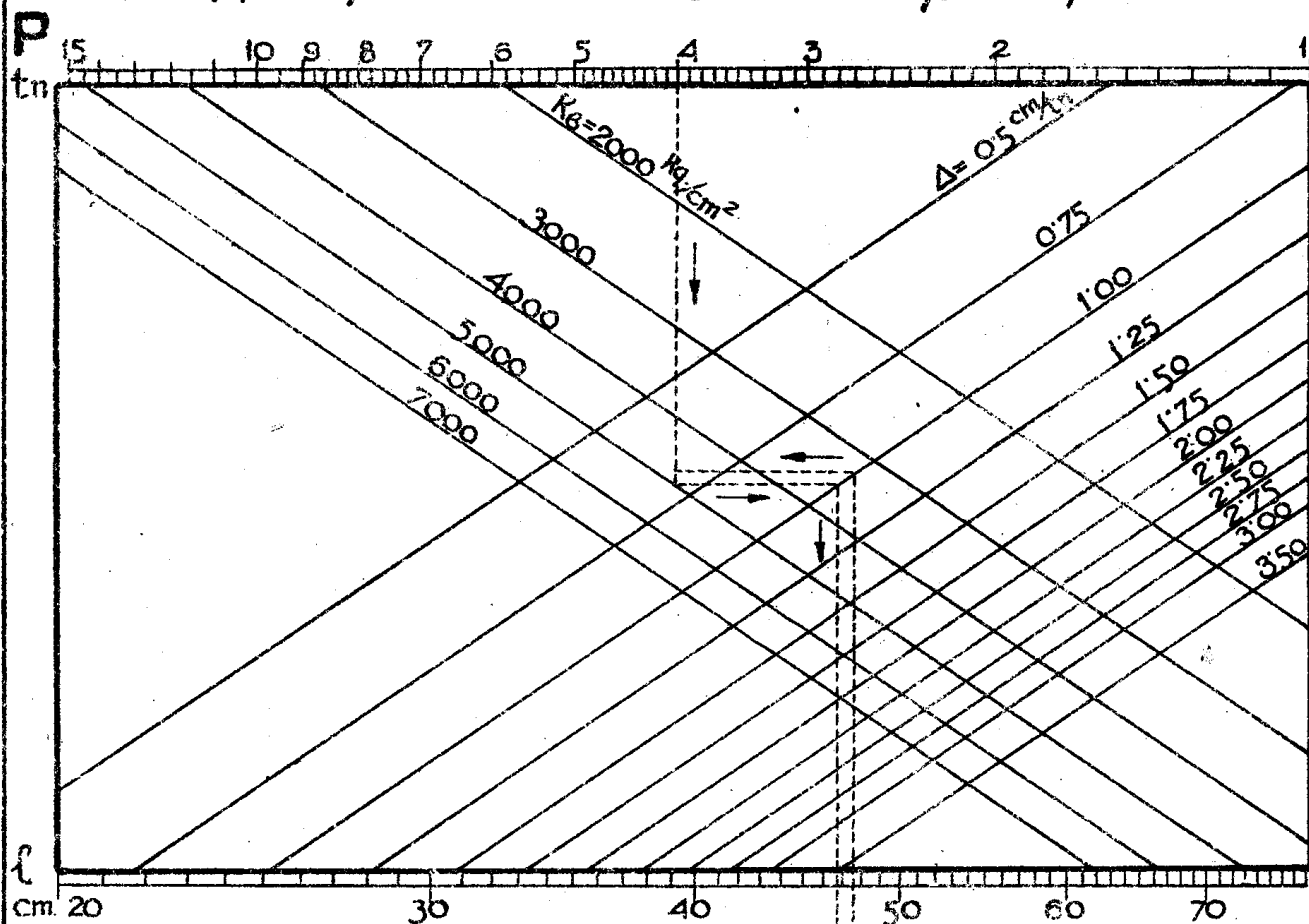
для расчета листовых рессор



# НОМОГРАММА

110×13

ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИСТОВЫХ РЕССОР



20. Угол при вершине рессоры:

$$2\varphi_0 = 57,4 \frac{S}{R} \text{ градусов.}$$

21. Длину остальных листов рессоры определяем обычным путем:

Длина коренного листа  $= S$ .

$$\text{Длина второго листа} = S \frac{n-1}{n}.$$

$$\text{Длина третьего листа} = S \frac{n-2}{n} \text{ и т. д.}$$

## II. Определение времени реагирования рессоры.

(Для парашютного механизма по фиг. 11).

Обозначения (кроме вышеуказанных):

$P_0$ —затяжка рессоры, т. е. усилие рессоры в период торможения (очевидно  $P_0 < P$ ),

$z$ —величина, на которую распрямляется рессора в период реагирования, в  $cm$ ,

$f-z$ —оставшийся упругий прогиб, соответствующий нагрузке  $P_0$ .

$\tau$ —время реагирования рессоры в секундах, т. е. период времени, проходящий с момента обрыва каната до соприкосновения ножей с проводниками. За это время стрела прогиба рессоры  $f$  уменьшится до величины  $f-z$ .

$G_A$ —вес самой рессоры в килограммах,

$G_B$ —вес поперечины  $B$  в  $kg$ ,

$G_C$ —вес серьги  $C$  в  $kg$  (каждой серьги отдельно),

$J_D$ —момент инерции массы каждого рычага  $D$  относительно оси  $E-E$  в  $kg \text{ cm sec}^2$ ,

$J_E$ —момент инерции массы вала  $E$  в  $kg \text{ cm sec}^2$ ,

$J_F$ —момент инерции массы каждого ножа, относительно оси  $E-E$  в  $kg \text{ cm sec}^2$ .

(Момент инерции масс подсчитываются по формулам Hütte, т. I, стр. 248, изд. 13-е. При подсчете все размеры берутся в  $cm$ , ускорение  $g = 981 \text{ cm/sec}^2$ ),

$r_D$ —радиус рычага  $D$  в сантиметрах, выбираемый из конструктивных соображений.

1. Приведенная масса рессоры:

$$m_{A \text{ red}} = \frac{11}{15} \frac{G_A}{981} \frac{kg \text{ sec}^2}{cm},$$

где вес рессоры может быть подсчитан по формуле:

$$G_A \cong S \frac{n+1}{2} b h \gamma \text{ kg},$$

если  $S$ ,  $b$  и  $h$ —в сантиметрах, а  $\gamma$  в  $\text{kg/cm}^3$ .

2. Приведенная масса поперечины  $B$ :

$$m_B = \frac{G_B}{981} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}}.$$

3. Приведенная масса каждой серьги  $C$ :

$$m_C = \frac{G_C}{981} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}}.$$

4. Приведенная масса каждого рычага  $D$ :

$$m_{D \text{ red}} = \frac{J_D}{r_D^2} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}}.$$

5. Приведенная масса каждого вала  $E$ :

$$m_{E \text{ red}} = \frac{J_E}{r_D^2} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}}.$$

6. Приведенная масса каждого ножа  $F$ :

$$m_{F \text{ red}} = \frac{J_F}{r_D^2} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}}.$$

7. Приведенная масса всей системы:

$$m = m_{A \text{ red}} + m_B + 2m_C + 2m_{D \text{ red}} + 2m_{E \text{ red}} + 4m_{F \text{ red}}.$$

8. Величины  $P_0$ ,  $P$ ,  $f$  и  $z$  связаны между собою соотношением:

$$\frac{P_0}{P} = \frac{f-z}{f}.$$

Задаваясь необходимой затяжкой рессоры  $P_0$  (конечно меньше  $P$ ) отсюда можно определить  $z$  или, наоборот, задавшись  $z$  из конструктивных соотношений передачи к ножам, можно определить соответствующее  $P_0$ .

9. Время реагирования рессоры:

$$\tau = \sqrt{\frac{m\Delta}{1000}} \arccos \left( 1 - \frac{z}{f} \right) \text{ секунд},$$

или

$$\tau = \sqrt{\frac{m\Delta}{1000}} \arccos \left( \frac{P_0}{P} \right) \text{ секунд},$$

где  $\Delta$  гибкость рессоры в  $\text{cm/tн}$ .