Проф. Г. В. ТРАПЕЗНИКОВ.

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ НА УДАРНОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗКИ.

Две формулы: одна для максимальной деформации от действия груза, падающего с высоты H:

$$\Delta l_\partial = \Delta l_c + \sqrt{\Delta l_c^2 + 2H\Delta l_c}$$

или:

$$\frac{\Delta l_\partial}{\Delta l_c} = 1 + \sqrt{1 + 2\frac{H}{\Delta l_c}}$$

и, другая, для максимальных напряжений, в тех же условиях:

$$\sigma_\partial = \sigma_c + \sqrt{\sigma_c^2 + 2\frac{H}{l}E\sigma_c}$$

или:

$$\frac{\sigma_\partial}{\sigma_c} = 1 + \sqrt{1 + 2\frac{HE}{l\sigma_c}}$$

исчерпывают собою, обычно, весь расчет на ударное действие нагрузки.

Эти формулы применимы, при расчете на удар, для простых стержней, растягиваемых или сжимаемых. Функциональный состав формул, которые могут быть приведены для расчета на удар при кручении и изгибе, будет таким же, как и в только что написанных формулах. Все изменение будет заключаться в замене одних физических характеристик материала и геометрических характеристик деформируемого тела—другими, напряжения одного вида—другим.

В производственных условиях, картина удара, очень часто, чтоб не сказать, всегда, гораздо сложнее того, что мы имеем при простом падении груза. Удар при откате ствола артиллерийского орудия, набег экипажа (вагон, авто) на препятствие, работа клапанов паромашины или двигателя внутреннего сгорания—все это примеры и громадное количество других, перечислять которые нет необходимости и возможности, указывают на неприменимость формул, приведенных вначале.

При расчете деталей или систем на ударное действие нагрузки, конструктор, в большинстве случаев, принужден создавать сложные аналитические выражения для того, чтобы исчер-

пав рассмотрение картины удара, он имел возможность определить эффект последнего.

Нельзя, конечно, охватить (не говоря уже об объеме этой статейки) всех случаев ударного действия нагрузки, которые предоставляются нам практикой; нельзя потому, что отдельные случаи имеют свою специфику, которая исключает возможность их точной классификации. Такой, например, вариант удара, в котором соударяются две и, притом, обе деформируемые системы, с численно сравнимыми массами, при внецентренном приложении удара, можно решать только для частного случая и решение это потребует целой книги. Поэтому, в общем виде можно рассмотреть только такой удар, при котором масса деформируемой системы невелика по сравнению с ударяющей массой и подвижен только один из контрагентов удара: или масса, или система.

Цель настоящей статьи—дать, в общем виде, ход расчета деформации упругой системы при действии на нее подвижной массы. При этом, мы не будем задаваться отдельными видами деформаций, а рассмотрим упругую систему вообще, в которой, в пределах приложимости Гуковой пропорциональности, всегда будет иметь место зависимость:

$$\alpha \partial = P,$$

где под буквой ∂ *) будем подразумевать величину абсолютной деформации системы по нагрузке P. Иначе говоря, ∂ есть перемещение точки приложения нагрузки P к деформированной ею системе, по направлению этой нагрузки.

Коэффициент α является фактором пропорциональной связи между ∂ и P, и, для простых деформаций, имеет следующий функциональный состав:

Растяжение и сжатие

$$\alpha = \frac{P}{\Delta l} = \frac{EF}{l}.$$

Кручение

$$\alpha = \frac{M}{s} = \frac{2GJ_p}{al}.$$

Изгиб

$$\alpha = \frac{P}{f} = \frac{EJ_z}{\gamma l^3}.$$

Во второй формуле через a обозначена величина линейного перемещения силы P из пары $M = Pa$. В третьей формуле коэффициент γ зависит от способа загрузки балки и условий крепления ее опор.

*) Здесь умышленно нарушено стандартное обозначение деформаций, и абсолютная деформация системы названа буквой ∂, потому что мы рассматриваем случай общий. В частных случаях, может быть: $\partial = \Delta l$, $\partial = f$ и т. д.

При условии рассмотрения ударного действия массы на систему, взятую в общем виде, нам нет необходимости добиваться получения отдельной формулы для динамического напряжения. В пределах упругости материала системы всегда:

$$k = \beta P = \alpha\beta\partial \;**)$$

где k—напряжение и β—коэффициент пропорциональности, соответствующий виду системы, условиям приложения нагрузки и положению того элемента системы, где определяется k.

Поэтому мы ограничимся нахождением ∂_∂—абсолютной динамической деформации в точке приложения удара. Что же касается определения величины коэффициента α для каждого частного случая, в системах сложных, то мы должны иметь возможность, с необходимой точностью, аналитически, графически или экспериментально, его получить.

В дальнейшем мы будем обозначать абсолютную динамическую деформацию через ∂_∂ и таковую же статическую, через ∂_c.

Приступим к расчету. Пусть движущаяся масса, имеющая вес Q, в момент касания с системой, обладает скоростью v_0 и ускорением j_0. Для расчета на удар, мы должны знать величину v_0 и закон изменения j в пределах: от момента касания массы и системы до момента потери массой всей кинетической энергии, которая израсходуется на деформацию системы. Собственное ускорение массы j должно определяться условиями ее связей при движении (привод от машины, направляющие с трением, вязкая среда), причем в число этих связей не входит связь „масса-система". Это ускорение, в зависимости от обстоятельств и условий движения массы может быть функцией пути, мгновенной скорости или времени, протекшего от условленного начала отсчета последнего. Поэтому необходимо, для рассмотрения вопроса в более общем виде, провести решение задачи в трех вариантах, соответственно тому, в функции какого аргумента будет задано j. Для различения вариантов будем употреблять индексы: пути—x, скорости—v и времени—t. Ускорение будет писаться:

$$j_x,\; j_v\; j_t.$$

Первый вариант $j = j_x$.

Приняв за начала отсчетов времени и пути первый момент соприкасания массы и деформирующейся системы, напишем дифференциальное уравнение движения массы:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Q}{g} j_x - P_x.$$

**) То же замечание относится и к обозначению напряжения буквой k. В зависимости от элемента системы, может оказаться, что:

$$k = \sigma_z,\; k = \sigma_b,\; k = \tau \text{ и т. д.}$$

Здесь m—величина массы равная: $m=\frac{Q}{g}$ и P_x—мгновенная упругая реакция системы, равная: $P_x=\alpha x$.
Уравнение может быть приведено к такому виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=j_x-\frac{\alpha xg}{Q}.$$

Так как, при статическом действии груза Q, мы имеем:

$$Q=\alpha\partial_c,$$

то окончательный и более простой вид дифференциального уравнения будет:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=j_x-\frac{g}{\partial_c}\ x.$$

или

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)d\left(\frac{dx}{dt}\right)=j_x\,dx-\frac{g}{\partial_c}\ xdx.$$

Интегрирование дает:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\int j_x dx-\frac{g}{2\partial_c}x+C_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Конечные условия таковы:

$$\text{при } x=0;\ \frac{dx}{dt}=v=v_0;$$

$$\text{при } x=\partial_\partial;\ \frac{dx}{dt}=0.$$

Подстановка величин, соответствующих конечным условиям, дает:

$$\partial_\partial^2-\frac{2\partial_c}{g}\int_0^{\partial_\partial} j_x dx-\frac{\partial_c v_0^2}{g}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Это уравнение должно быть разрешено относительно ∂_∂. Так j_x—функция пути, то интеграл явится функцией ∂_∂. От вида функции j_x зависит большая или меньшая сложность решения уравнения (1). При расчете на удар, часто встречается необходимость знать время, в течении которого деформация получила свою максимальную величину, так как этим определяется период колебания системы. Это время, назовем его величину буквой T, определится путем дальнейшего интегрирования.

Имеем:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2C_1 + 2\int_0^x j_x dx - \frac{g}{\partial_c} x^2}}.$$

Но, из (A) получаем: $2C_1 = v_0^2 - 2\int^{0} j_x dx$.

Время, потребное для получения максимального значения деформации:

$$T = \int_0^{\partial_\partial} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2\int_0^x j_x dx - \frac{g}{\partial_c} x^2}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

И в этом случае, трудность решения интеграла всецело зависит от вида функции j_x.

Частные случаи.

Если деформация системы имеет небольшую величину, а ускорение j_x изменяется, по пути, не слишком быстро, то можно принять, что ускорение $j_x = j_0 = \text{const}$. Необходимо оговориться, что самый процесс деформации системы не должен изменять условий внешней связи массы. Считая, в таком случае, ускорение постоянным и равным тому, которое было в начальный момент касания массы с системой, получим, для уравнений (1) и (2) выражения:

$$\partial_\partial^2 - 2\frac{j_0}{g}\partial_c \partial_\partial - \frac{\partial_c v_0^2}{g} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)'$$

и

$$T = \int_0^{\partial_\partial} \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 + 2j_0 x - \frac{g}{\partial_c} x^2}} = \sqrt{\frac{\partial_c}{g}} \left| \arcsin \left(\frac{\frac{gx}{j_0 \partial_c} - 1}{\sqrt{1 + \frac{g v_0^2}{j_0^2 \partial_c}}} \right) \right|_0^{\partial_\partial} \quad (2)'$$

Из них получатся расчетные уравнения:

$$\frac{\partial_\partial}{\partial_c} = \frac{j_0}{g}\left(1 + \sqrt{\frac{g v_0^2}{j_0^2 \partial_c}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)''$$

$$T = \sqrt{\frac{\partial_c}{g}} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{g v_0^2}{j_0^2 \partial_c}}}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad (2)''$$

В случае удара при свободном падении массы, уравнения (1) и (2) получат еще более простой вид:
Имеем: $j_0 = g$; $v_0^2 = 2gH$.
Получаем:

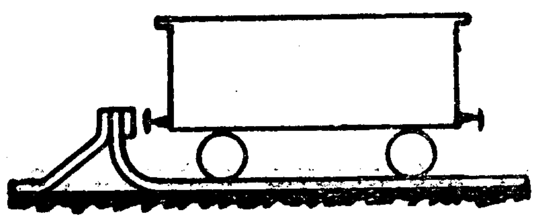
$$\frac{\partial_\partial}{\partial_c} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\partial_c}} \quad \ldots \ldots \ldots (1)'''$$

и

$$T = \sqrt{\frac{\partial_c}{g}}\left[\frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2H}{\partial_c}}}\right)\right] \quad \ldots \ldots (2)'''$$

Примеры расчета.

При решении этих и следующих за ними примеров расчета на удар, я должен оговориться, что все промежуточные данные, не имеющие непосредственного отношения к операциям с формулами удара, вычисляться, в большинстве случаев, не будут, за малостью, предоставленного статье, места. Поэтому, почти во всех примерах, будут фигурировать готовые цифровые данные.



Черт. 1.

Пример 1. Вагон имеет полный вес $G = 38\ t$. Два буфера, работающие одновременно, имеют пружины с характеристикой:

$$f = 0{.}000214\ P\ (cm,\ kg).$$

Предельная рабочая деформация пружин буферов (до соприкасания витков) равна $f_{max} = 6\ cm$. Коэффициент трения колес: $\mu = 0{.}05$.

Определить предельную скорость удара вагона в колодку тупика, пренебрегая деформацией последней.

Ускорение:

$$j = \text{const.} = -\frac{\mu G}{g} = -\frac{0{.}05 . 38000}{981} = -1{.}99 \cong -2\,\frac{cm}{sec^2}.$$

Стат. деформ.:

$$\partial_c = 0{.}000214 . 38000 = 8{.}13\ cm.$$

Предельная скорость должна соответствовать предельной деформации пружин:

$$\partial_\partial = f_{max} = 6\ cm.$$

Применим уравнение (1)':

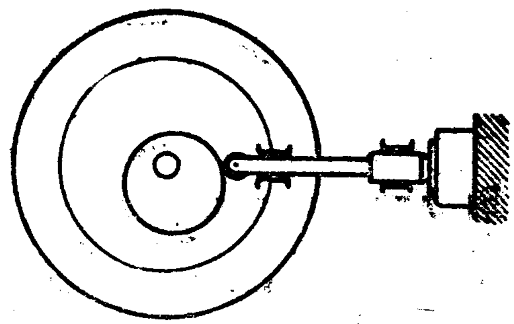
$$6^2 + \frac{2.2.8{.}13.6}{981} - \frac{8{.}13}{981} v_0^2 = 0$$

откуда:

$$v_0 = \sqrt{4280} = 65._4 \frac{cm}{sec} = 2._{35} \frac{km}{h}.$$

Пример 2. Маховик кулачного пресса имеет: $n = 120 \frac{об}{мин}$. Очертание кулака выражается формулой: $n = a e^{\varphi} + r$, где: $a = 2$ *cm* и $r = 5$ *cm*.

Определить деформацию (в пределах упругости) штампуемой детали, если от действия приведенной к штемпелю статической нагрузки, она деформируется: $\partial_c = 0._5$ *cm*.



Черт. 2.

Пусть, считая с момента касания штемпеля и деформируемого предмета, ход штемпеля определяется:

$$x = \rho - 2r = ae^{\varphi} - r \qquad (\varphi = \omega t).$$

Тогда:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a\omega e^{\varphi} = \omega (x + r)$$

$$j_x = \frac{d^2x}{dt^2} = a\omega^2 e^{\varphi} = \omega^2 (x + r).$$

При: $x = 0$

$$v_0 = \omega r = \frac{\pi n r}{30} = \frac{\pi 120 \cdot 5}{30} = 62._8 \frac{cm}{sec}.$$

$$\omega = 12._{56} \ sec^{-1}.$$

Вычислим, для пользования уравнением (1), величину интеграла:

$$\int_0^{\partial_\partial} j_x dx = \omega^2 \int_0^{\partial_\partial} (x + r)\, dx = \omega^2 \left[\frac{\partial_\partial^2}{2} + r\partial_\partial\right].$$

При подстановке полученного значения интеграла в (1) и преобразования, получаем:

$$(g - \omega^2 \partial_c)\, \partial_\partial^2 - 2\omega^2 \partial_c r \partial_\partial - v_0^2 \partial_c = 0.$$

Подстановка численных значений величин дает:

$$\partial^2_\partial - 0._{873}\partial_\partial - 2._{185} = 0.$$

откуда:

$$\partial_\partial = 1._{98} \ cm.$$

Второй вариант $j = j_v$.

Дифференциальное уравнение движения массы напишется:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = j_v - \frac{g}{\partial_c}x.$$

Перепишем его в таком виде:

$$\frac{dx}{dx}\cdot\frac{dv}{dt} + \frac{g}{\partial_c}x - j_v = 0,$$

или, окончательно:

$$\left(\frac{g}{\partial_c}x - j_v\right)dx + vdv = 0.$$

Ввиду того, что функция j_v в общем виде неизвестна, для интегрирующего множителя может быть взята функция от одного переменного. Такой функцией может быть только:

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial v}\right) = \frac{\partial j_v}{v\partial v}.$$

Так как интегрирующий множитель должен иметь вид:

$$\mu = e^{-\int \frac{\partial j_v}{v\partial v}dx}$$

то величина $\frac{\partial j_v}{v\partial v}$ должна быть постоянной. Это же будет только в единственном случае, а именно, при: $j_v = av^2 + b$

Тогда:

$$\mu = e^{-\int 2adx} = e^{-2ax}.$$

Этот случай, как раз, и имеет весьма широкое распространение. Сила сопротивления жидкой среды, движущемуся в ней телу, пропорциональна квадрату скорости тела. Таким образом, ускорение (замедление), получаемое телом от внешней связи (жидкость), пропорциональное силе этой связи, будет пропорционально квадрату скорости. Для общности решения, мы оставим в выражений для j_v, постоянную b.

Ускорение $j_v = av^2 + b$.

Интегрирующий множитель будет иметь вид: $\mu = e^{-2ax}$.

При умножении на e^{-2ax} уравнение должно превратиться в полный дифференциал.

$$e^{-2ax}\left(\frac{g}{\partial_c}x - av^2 - b\right)dx + e^{-2ax}vdv = 0.$$

Решаем уравнение

$$e^{-2ax}\int v dv=\frac{1}{2}e^{-2ax}v^2+\varphi(x)$$

$$e^{-2ax}\left(\frac{g}{\partial_c}x-av^2-b\right)=-ae^{-2ax}v^2+\varphi'(x).$$

Откуда:

$$\varphi'(x)=e^{-2ax}\left(\frac{g}{\partial_c}x-b\right)$$

и

$$\varphi(x)=\frac{1}{4a^2}\left[2ab-\frac{g}{\partial_c}(2ax+1)\right]e^{-2ax}.$$

В окончательном виде, уравнение представится:

$$\left[2a^2v^2+2ab-\frac{g}{\partial_c}(2ax+1)\right]e^{-2ax}=C.$$

Конечные условия таковы:

при $x=0;\quad v=v_0;$
при $x=\partial_\partial;\quad v=0.$

Выполнение их дает:

$$\left[2ab-\frac{g}{\partial_c}(2a\partial_\partial+1)\right]e^{-2a\partial_\partial}=2aj_0-\frac{g}{\partial_c}\quad\ldots\ldots(3)$$

Получилось трансцедентное уравнение относительно искомой величины ∂_∂.

Ввиду неудобств, связанных с пользованием уравнением в трансцедентной форме, придадим ему такой вид, который бы позволил применить, для нахождения ∂_∂ номограмму.

$$e^{(2a\partial_\partial)}=\frac{(2a\partial_\partial)\left(\frac{b}{g}\right)-(2a\partial_\partial)-1}{(2a\partial_\partial)\left(\frac{j_0}{g}\right)-1}\quad\ldots\ldots\ldots(3)'$$

Полезно заметить, что, в настоящем случае, пропорциональности между динамической и статической деформациями нет.

Номограмма дана в бинарном поле. Пользование ею, лучше всего, уяснить при решении, приводимого ниже примера.

Пример расчета.

Пример 3. Гидросамолет садится на воду парашютируя, с вертикальной скоростью $v_0=3._{25}\frac{m}{sec}$. В условиях спокойного нахож-

дения на воде, удельная нагрузка на донную часть: $p = 3\ kg/dm^2$. Коэффициент сопротивления для воды $k = 40\,\frac{kg\ sec^2}{m^4}$. Определить динамическую деформацию обшивки дна, для какого-нибудь его элемента, если последний, в условиях свободного плавания, имеет:

$$d_c = 0{.}2\ cm$$

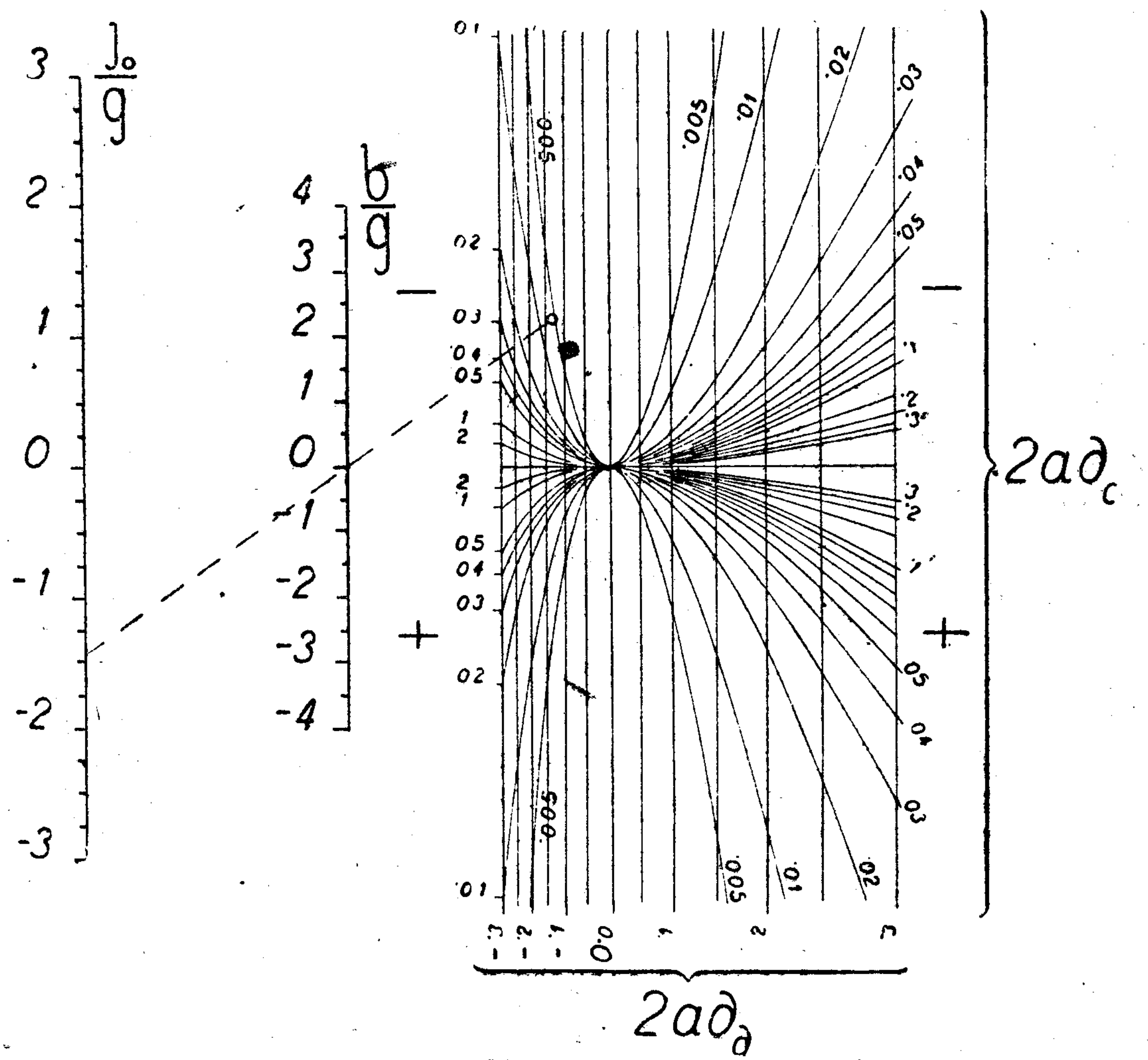
$$j_v = -\frac{ksv}{ps}g = -\frac{gk}{p}v^2$$

Следовательно:

$$a = -\frac{gk}{p} = \frac{981.40.10^2}{3.10^8} \cong 0{.}0131\ cm^{-1}$$

$$2ad_c = -2.0{.}0131.0{.}2 = 0{.}00524$$

$$\frac{j_0}{g} = \frac{av_0^2}{g} = -\frac{0{.}0131\ (325)^2}{981} = -1{.}410 \qquad \frac{b}{g} = 0.$$



Номограмма

Для нахождения динамической деформации воспользуемся номограммой следующим образом. Отметив на оси $\frac{j_0}{g}$ точку: $\frac{j_0}{g} = -1._{310}$, проводим прямую через нее и точку $\frac{b}{g} = 0$, на второй оси. На продолжении этой прямой находим точку, которая соответствовала бы в поле отрицательных $2a\partial_\partial$ (потому что $a < 0$) положению между отрицательными кривыми линиями $2a\partial_c$ отметке: $2\partial_c = -0._{00524}$. Определяя положение найденной точки отметкой между прямыми $2a\partial_\partial$, получаем:

$$2a\partial_\partial = -0._{13}.$$

Динамическая деформация будет:

$$\partial_\partial = -\frac{0._{13}}{2a} = \frac{-0._{13}}{-2.0._{0131}} \cong 5 \ cm.$$

Ускорение $j_v = av + b$.

В случае движения тела с небольшими, сравнительно, скоростями, в жидкости, обладающей большим коэффициентом вязкости, мы свободно можем считать, что сопротивление его движению будет пропорционально скорости. Поэтому необходимо рассмотреть еще один случай: движения, когда:

$$j_v = av + b.$$

Уравнение движения массы будет писаться:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (av + b) + \frac{g}{\partial_c} x = 0.$$

Продифференцируем его, чтобы оно включало в себя только две переменных.

$$\frac{d^2v}{dt^2} - a\frac{dv}{dt} + \frac{g}{\partial_c} v = 0.$$

Полученное линейное уравнение с постоянными коэффициентами имеет характеристическим уравнением:

$$\lambda^2 - a\lambda + \frac{g}{\partial_c} = 0$$

с корнями:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - \frac{g}{\partial_c}}\right) \text{ и } \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - \frac{g}{\partial_c}}\right).$$

Корни действительны, так как отрицательным может быть только a, но оно находится под радикалом во второй степени и $a^2 > \frac{g}{\partial_c}$.
Поэтому решение уравнения напишется:

$$v = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

Отсюда, интегрированием и дифференцированием, получаем:

$$x = \frac{A}{\lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{B}{\lambda_2} = e^{\lambda_2 t} \qquad \frac{dv}{dt} = \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 t}.$$

Конечные условия, подлежащие выполнению, таковы:

$$\text{при} \quad t = 0; \quad x = 0; \quad v = v_0; \quad \frac{dv}{dt} = av_0 + b$$

$$\text{и при} \quad t = T; \quad x = \partial_\partial; \quad v = 0.$$

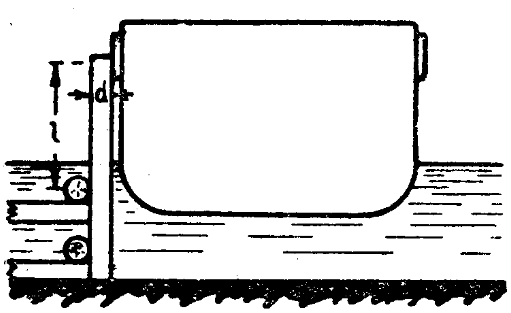
После подстановок и соответствующих операций, получим: расчетные формулы:

$$T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1 v_0 - j_0}{\lambda_2 v_0 - j_0} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\partial_\partial = \frac{(\lambda_1 v_0 - j_0)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}}}{\lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 v_0 - j_0)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}}} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

Пример расчета.

Пример 4. При пришвартовке парохода к пристани, он, причаливая бортом к сваям, нажимает верхним твердым кранцем на конец одной из свай. В момент касания имеется:



Черт. 3.

$$v_0 = 0._{05} \frac{m}{sec}.$$

Водоизмещение парохода 120 t. Длина свободного конца сваи $l = 2\,m$. Ее диаметр $d = 30\ cm$. Ее материал—сосна.

$$j = av \qquad a = -50\ sec^{-1}$$

$$j_0 = -50.5 = -250 \frac{cm}{sec^2}.$$

Статическая доформация:

$$\partial_c = \frac{Ql^3}{3EJ} = \frac{120000.(200)^3 64}{3.10^5.\pi.(30)^4} = 80._5\ cm.$$

То, обстоятельство, что, в данном случае, статическая деформация получает громадные размеры, не должно смущать расчитывающего, так как здесь мы имеем дело не с падающим грузом, где статическая деформация должна всегда быть меньше динамической. Здесь же под статической деформацией мы разумеем ту, которая была бы, еслиб движущаяся (но не по вертикали и не под влиянием силы тяжести) масса нагружала систему своим весом, статически.

Входящие в уравнение (6) величины:

$$\frac{g}{\partial_c} = \frac{981}{80._5} = 13._2\ sec^{-2}.$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[-50 - \sqrt{2500 - 12._2}] = -0._{06}\ sec^{-1}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}[-50 - \sqrt{2500 - 12._2}] = -49._{94}\ sec^{-1}.$$

Время, пошедшее на удар, определится (5):

$$T = \frac{1}{-0._{06} + 49._{94}} ln \frac{-0._{05}.5 + 250}{-49._{94}.5 + 250} = \frac{1}{49._{88}} ln\, 832._3 =$$

$$= \frac{6._{724}}{49._{88}} = 0._{135}\ sec.$$

Динамическая деформация будет:

$$\partial_\partial = \frac{(-0._{06}.5 + 250)^{\frac{-0._{06}}{49._{88}}}}{0._{06}.49._{94}\ (-49._{94}.5 + 250)^{\frac{-49._{94}}{49._{88}}}} = 0._{165}\ cm.$$

Напряжение в свае:

$$k_\partial = \frac{M_\partial}{W} = \frac{P_\partial l}{W} = \partial_\partial \frac{3Ed}{2l^2} = 0._{165} \frac{3.10^5.30}{2.(200)^2} = 18._6\ kg/cm^2.$$

Третий вариант $j = j_t$.

Ускорение, зависящее от времени, будет иметь место, главным образом, при движении тела, целиком или частично пара-

магнитного, в переменном магнитном поле, вызываемом, изменяющимися же, электрическими условиями его возникновения и изменения.

Дифференциальное уравнение напишется:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=j_t-\frac{g}{\partial_c}x$$

или:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{\partial_c}x=j_t.$$

Уравнение без правой части дает решение:

$$x=A\sin\varphi+B\cos\varphi$$

где, для краткости письма, обозначаем:

$$\varphi=\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,t,$$

помня, что:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}.$$

Для нахождения полного интеграла необходимо решить систему двух уравнений относительно A' и B'—производных, взятых по времени:

$$A'\sin\varphi+B'\cos\varphi=0$$
$$A'\cos\varphi-B\sin\varphi=j_t.$$

Решение системы дает:

$$A'=\sqrt{\frac{\partial_c}{g}}\,j_t\cos\varphi$$

$$B'=-\sqrt{\frac{\partial_c}{g}}\,j_t\sin\varphi.$$

Отсюда легко определяются A и B.

$$A=\sqrt{\frac{\partial_c}{g}}\int j_t\cos\varphi\,dt+C_1$$

$$B=-\sqrt{\frac{\partial_c}{g}}\int j_t\sin\varphi\,dt+C_2.$$

Полный интеграл пути массы изобразится:

$$x=\sqrt{\frac{\partial_c}{g}}\left[\sin\varphi\int j_t\cos\varphi\,dt-\cos\varphi\int j_t\sin\varphi\,dt\right]+C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi.$$

Скорость:

$$\frac{dx}{dt}=\cos\varphi\int j_t\cos\varphi\,dt+\sin\varphi\int j_t\sin\varphi\,dt+\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,(C_1\cos\varphi-C_2\sin\varphi).$$

Ускорение:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=j_t+\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\left[\cos\varphi\int j_t\sin\varphi\,dt-\sin\varphi\int j_t\cos\varphi\,dt\right]-$$

$$-\frac{g}{\partial_c}(C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi).$$

Конечные условия таковы:

$$\text{при}\quad i=0;\quad x=0;\quad \frac{dx}{dt}=0;\quad \frac{dx}{dt}=j_0;$$

$$\text{при}\quad t=T;\quad x=\partial_\partial;\quad \frac{dx}{dt}=0.$$

Подстановка частных значений факторов движения массы дает:

$$0=\cos\left(\sqrt{\frac{g}{g_c}}\,T\right)\int_0^T j_t\cos\varphi\,dt+\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T\right)\int_0^T j_t\sin\varphi\,dt+$$

$$+v_0\cos\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T \qquad (7)$$

$$\partial_\partial=\sqrt{\frac{\partial_c}{g}}\left[\sin\left(\sqrt{\frac{g}{б_c}}\,T\right)\int_0^T j_t\cos\varphi\,dt-\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T\right)\int_0^T j_t\sin\varphi\,dt+\right.$$

$$\left.+v_0\,{\rm ɜin}\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T\right)\right] \qquad (8)$$

где $\varphi=\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,t.$

Первое уравнение будет служить для определения времени, пошедшего на совершение деформации. Определив время, мы должны подставить его значение во второе уравнение, из которого и получится величина динамической деформации.

Частные случаи.

Если величина ускорения j_t не изменяется со временем, то мы должны получить более простые уравнения.

Пусть $j_t=j_0=\text{const}.$

Тогда:

$$\int_0^T j_t \sin\varphi \, dt = j_0 \sqrt{\frac{\partial_c}{g}} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\, T\right)\right]$$

$$\int_0^T j_t \cos\varphi \, dt_0 = j_0 \sqrt{\frac{\partial_c}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\, T\right)$$

и уравнения примут вид:

Первое, которое служит для определения времени:

$$0 = j_0 \sqrt{\frac{\partial_c}{g}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\, T\right) + v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\, T\right) \quad \ldots (7)'$$

Оно целиком совпадает с уравнением $(2)''$.

Подстановка T, определенного из этого уравнения, во второе дает:

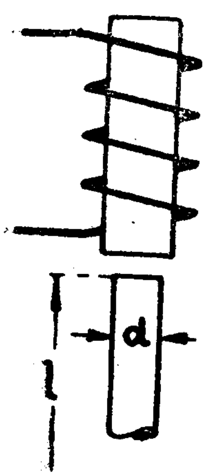
$$\frac{\partial_{\partial}}{\partial_c} = \frac{j_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g v_0^2}{j_0^2 \partial_c}}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (8).$$

т. е. уравнение, которое мы уже имели—$(1)''$.

Пример расчета.

Пример 5. Молоток соленоидного перфоратора работает при 20 периодах в секунду. Его вес $G = 2$ *kg*. Ускорение изменяется по закону:

$$j_t = 3\, g \cos\frac{\pi t}{10}.$$



Черт. 4.

Каково будет напряжение в штанге перфоратора, имеющей длину $l = 2$ *m* и диаметр $d = 2$ *cm*, если копье попало на твердую породу, в которую, практически, не проникает (наихудший случай). Штанга стальная. $v_0 = 20\,\frac{m}{sec}$.

Вычислим отдельно интегралы, входящие в уравнения (7) и (8).

$$\int_0^T j_t \sin\varphi \, dt = 3\, g \int_0^T \cos\frac{\pi t}{10} \sin\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\, t dt =$$

$$= \frac{3g}{2}\left| -\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}} + \frac{\pi}{10}\right)t}{\sqrt{\frac{g}{\partial_c}} + \frac{\pi}{10}} - \frac{\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}} - \frac{\pi}{10}\right)t}{\sqrt{\frac{g}{\partial_c}} - \frac{\pi}{10}} \right|_0^T \cong$$

$$\cong 3\,\partial_c\left[\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\left(1-\cos\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T\right).\cos\frac{\pi T}{10}-\frac{\pi}{10}\sin\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T.\sin\frac{\pi T}{10}\right].$$

$$\int_0^T j_t\cos\varphi\,dt=3\,g\int_0^T\cos\frac{\pi t}{10}\sin\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,tdt=$$

$$=\frac{3g}{2}\left|\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}+\frac{\pi}{10}\right)t}{\sqrt{\frac{g}{\partial_e}}+\frac{\pi}{10}}+\frac{\sin\left(\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}-\frac{\pi}{10}\right)t}{\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}-\frac{\pi}{10}}\right|_0^T\cong$$

$$\cong 3\,\partial_c\left[\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\left(1+\sin\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T\cos\frac{\pi T}{10}\right)-\frac{\pi}{10}\cos\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T.\sin\frac{\pi T}{10}\right].$$

Ввиду большой громоздкости уравнений, дадим только конечные результаты подстановок.

Подстановка найденных значений интегралов в уравнение (7) дает:

$$3_\partial\left[\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\left(\sin\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T+\cos\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T\right)-\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi T}{10}\right]+$$

$$+v_0\cos\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T=0.$$

Определяем цифровую часть аргументов:

$$\partial_c=\frac{Gl}{EF}=\frac{2.200.4}{2._2.10^6\pi.2^2}=0._{000058}\ cm$$

$$\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}=\sqrt{\frac{981}{0._{000058}}}=4110\ sec^{-1}.$$

Подстановка цифр в (7) и пренебрежение весьма малыми (относительно) величинами, дает:

$$tg\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,\mathrm{T}=-2800.$$

Откуда:

$$T=0._{00038}\ sec.$$

Вычисляем значения sin'ов и cos'ов.

$$\sin\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T \cong 1,$$

$$\cos\sqrt{\frac{g}{\partial_c}}\,T = 0._{012},$$

$$\sin\frac{\pi T}{10} = 0._{00012},$$

$$\cos\frac{\pi T}{10} \cong 1.$$

Подстановка всех полученных и вычисленных величин в уравнение (8) дает:

$$\partial_c = 0._{487}\ cm.$$

Определяем величину динамического напряжения:

$$k_\partial = \frac{P_\partial}{F} = \partial_c\frac{E}{l} = \frac{0._{487}.2._2.10^6}{200} = 5360\ kg/cm^2.$$