

3. Существует область оптических размеров облаков, при которых радиационное взаимодействие между ними максимально (при прочих равных условиях)

и определяется индикатрисой рассеяния излучения: с увеличением ее анизотропии максимум смещается в область больших оптических размеров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ленобль Ж. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. – Л.: Гидрометеоздат, 1990. – 264 с.
2. Зуев В.Е., Титов Г.А. Оптика атмосферы и климат. – Л.: Гидрометеоздат, 1996. – 256 с.
3. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. – М.: Мир, 1971. – 168 с.
4. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Некоторые особенности переноса излучения в пространственно ограниченных дисперсных средах // Известия Томского политехнического университета. – 2000. – Т. 303. – № 3. – С. 91–104.

5. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Исследование влияния размеров и формы рассеивающего объема на радиационные характеристики переноса излучения // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 5. – С. 12–15.
6. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Перенос излучения в дисперсной среде при ее дроблении // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. – № 2. – С. 42–45.
7. Горячев Б.В., Могильницкий С.Б. Перенос оптического излучения в условиях разорванной облачности // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 313. – № 2. – С. 73–76.

Поступила 04.06.2010 г.

УДК 533.9.08:519.677

## МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЧ ИЗЛУЧЕНИЯ ИМПУЛЬСНОГО РАДАРА В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

А.А. Калашников, А.В. Шарнин

Томский политехнический университет  
E-mail: Alex-in-black@rambler.ru

*Показана актуальность решения прямой задачи импульсной рефлектометрии высокотемпературной плазмы. Представлена динамическая модель импульсной рефлектометрии. Модель учитывает двумерные пространственные эффекты взаимодействия зондирующей волны и плазмы при умеренных требованиях к вычислительным ресурсам.*

#### Ключевые слова:

*Импульсная рефлектометрия, высокотемпературная плазма, динамическая модель, распространение микроволнового излучения в плазме.*

#### Key words:

*Microwave pulsed reflectometry, fusion plasma, dynamical model, probing microwave propagation in plasma.*

#### Введение

В настоящее время создано большое количество экспериментальных установок управляемого термоядерного синтеза (УТС) типа токамак [1], однако проблема создания термоядерного реактора с положительным коэффициентом полезного действия остается нерешенной. Решение этой проблемы включает в себя множество принципиальных подзадач, актуальных в настоящее время, одной из которых является повышение точности определения параметров протекающих в плазме процессов [2].

Экспериментальное определение параметров этих процессов связано с преодолением ряда принципиальных трудностей. К ним относятся ограничения доступа к плазме, накладываемые конструкцией вакуумной камеры, необходимость использования преимущественно бесконтактных методов косвенного измерения параметров плазмы, высокая скорость исследуемых процессов, проблемы решения обратных задач [3] обработки экспери-

ментальных данных с целью определения искомых параметров плазмы и их пространственно-временных распределений.

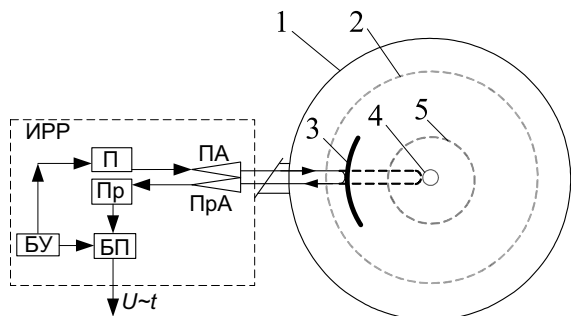
В работе рассматриваются вопросы моделирования процесса распространения зондирующей электромагнитной волны импульсного рефлектометра [4] в плазме установки УТС. Показана актуальность задачи моделирования, представлена аналитическая модель импульсной рефлектометрии, обсуждаются возможности ее применения.

#### Методика импульсной рефлектометрии плазмы

Импульсная рефлектометрия [4] является бесконтактным методом измерения применяемого для оценки пространственно-временного распределения плотности электронов в плазме установок УТС. Схема зондирования плазмы по методу импульсной рефлектометрии представлена на рис. 1.

В основу метода заложены следующие принципы. Импульсный радар-рефлектометр (ИРР) испускает монохроматический волновой пакет с задан-

ной несущей частотой, который проникает в плазму, распространяется до слоя с критической плотностью электронов и отражается от него. Отраженная волна попадает в приемную антенну ИРР, и регистрируется время ее пролета. Регистрация осуществляется согласно экспериментальному алгоритму определения времени пролета [4].



**Рис. 1.** Схема зондирования плазмы по методу импульсной рефлектометрии: 1) стенка вакуумной камеры; 2, 5) границы плазмы в горизонтальном сечении; 3) отражающий слой плазмы; 4) центральный соленоид; ПА – передающая антенна; Пра – принимающая антенна; П – передатчик; Пр – приемник; БУ – блок управления; БП – блок преобразований; ИРР – импульсный радар-рефлектометр

Измеряемое время используется для оценки функции распределения плотности электронов в плазме. При выполнении ряда условий, время пролета зависит преимущественно от распределения плотности электронов и частоты зондирующего излучения. Существуют принципиальные сложности нахождения распределения электронной плотности по времени пролета зондирующей волны, которые будут рассмотрены далее.

#### Актуальность создания модели

Задача нахождения распределения плотности электронов по измеренному времени пролета СВЧ излучения импульсного радара в плазме относится к классу некорректных обратных задач [3]. Для решения обратной задачи требуют решить прямую задачу – определение времени пролета излучения при заданном распределении электронной плотности плазмы. Широко используемым путем решения прямой задачи является разработка математической модели и ее реализация на компьютере.

Сложность решения прямой задачи определяется целью создания модели и возможностями ее практической реализации. Актуальность создания новой модели импульсной рефлектометрии плазмы определяется потребностью повышения точности моделирования при обеспечении относительно высокой скорости расчета. Целью создания модели является уточнение границ применимости моделей импульсной рефлектометрии плазмы, основанных на реализации метода аппроксимации геометрической оптики [5], а также расширения и уточнения границ применимости аналитических двумерных моделей распространения волн в плазме. В частности, планируется исследовать в каких случаях ре-

зультаты расчетов по аналитической и эталонной модели, основанной на численном решении системы уравнений Максвелла, будут отличаться с погрешностью не хуже требуемой, а длительность расчета по аналитической модели на персональном компьютере останется приемлемой.

Исходными данными для создания модели являются параметры волнового пакета зондирующего излучения ИРР, свойства плазмы и установки УТС. Выходными данными модели является время пролета волнового пакета зондирующего излучения в плазме.

#### Постановка задачи моделирования

Основные эффекты взаимодействия СВЧ-волны с плазмой зависят от компонентного состава, температуры и плотности плазмы, геометрических размеров плазменного образования, распределения результирующего магнитного поля на пути распространения зондирующего излучения, свойств зондирующего излучения [5, 6].

В установках УТС типа токамак используется дейтериевая плазма или смесь дейтериевой и тритиевой плазмы с очень низким содержанием примесей. Основное влияние на распространение СВЧ волны в плазме оказывают электроны, влиянием ионов можно пренебречь. Влияние результирующего магнитного поля на распространение СВЧ волны ИРР в плазме может быть уменьшено до пренебрежимо малого уровня путем выбора соответствующего направления зондирования и ориентации плоскости поляризации зондирующего излучения так, чтобы в плазме распространялась преимущественно обыкновенная мода волны [4]. Геометрические размеры плазменной конфигурации много больше длины зондирующей волны, поэтому дифракционными эффектами можно пренебречь. Ширина спектра волнового пакета составляет не более 10 % относительно несущей частоты для всех частотных каналов, поэтому излучение можно трактовать как моно- или квазимонохроматическое.

Таким образом, при зондировании плазмы обыкновенной модой волны основное влияние на ее распространение будет оказывать распределение плотности электронов, положение и размер пучка зондирующего излучения. Остальные эффекты не являются определяющими для взаимодействия и в рамках разрабатываемой модели не учитываются.

Тороидальная плазменная конфигурация представлена на рис. 2. Пучок СВЧ излучения с плоским фронтом волны испускается передающей антенной ПА и падает на границу плазмы. Отражение фронта падающей волны от границы плазмы не влияет на результаты времяпролетных измерений при проведении регистрации в соответствующем временном окне.

Рассмотрим распространение волны внутри плазмы. Границы поперечного сечения пучка зондирующего излучения в двух взаимно перпендику-

лярных плоскостях плазмы  $XOY$  и  $XOZ$  (рис. 2) схематично изображены на рис. 3.

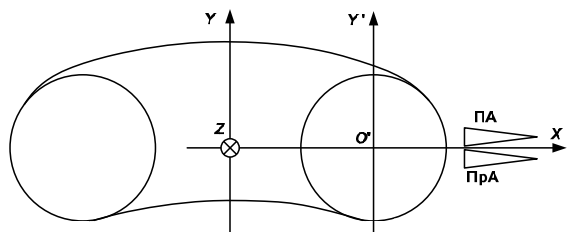


Рис. 2. Вид плазменного образования: ПА – передающая антенна; Пра – принимающая антенна

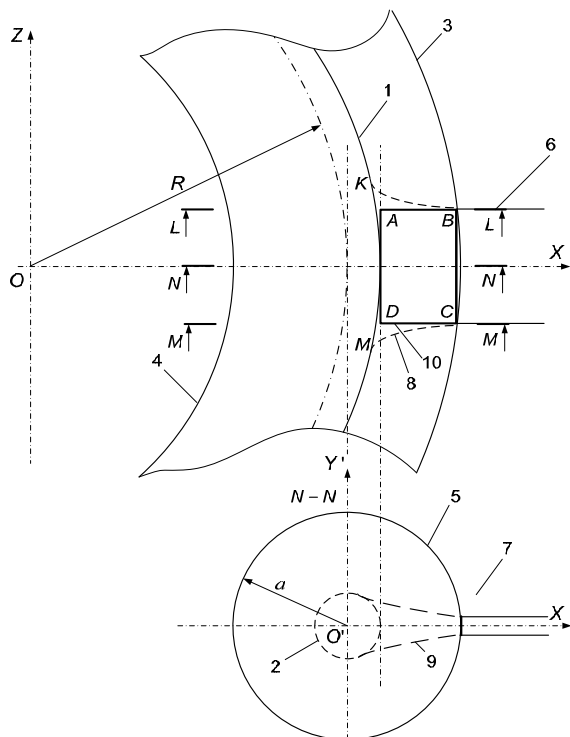


Рис. 3. Распространение волны внутри плазмы. Границы: 1,2) отражающего слоя плазмы с критической электронной плотностью; 3–5) плазменного шнура в соответствующих сечениях; 6, 7) пучка зондирующей волны вне плазмы; 8,9) пучка с учетом пространственной дисперсии в направлении осей  $OZ$  и  $OY$ ; 10) пучка внутри плазмы без учета пространственной дисперсии в направлении оси  $OZ$

Проекция границы пучка на плоскость  $XOZ$  (рис. 3) выделяет замкнутую область  $KBCM$ . Выполним сечение плазмы плоскостями перпендикулярными оси  $OZ$  и проходящими через область  $KBCM$ . Если пространственная дисперсия в направлении оси  $OZ$  пренебрежимо мала, то вместо области  $KBCM$  достаточно рассмотреть область  $ABCD$  и перейти из тороидальной системы координат с центром в точке  $O$  в цилиндрическую систему координат с центром в точке  $O'$ .

Влияние дисперсии сказывается на точности регистрации отраженного волнового пакета радаром. С увеличением дисперсии увеличивается угол отражения волны и уменьшается интенсивность регистрируемого волнового пакета. Ее влияние на

время пролета связано с изменением оптического пути, при принятых выше ограничениях это влияние пренебрежимо мало.

При зондировании рассматриваемого цилиндрического плазменного образования плоским фронтом волны с нормалью перпендикулярной оси цилиндра  $O'Y'$ , распределение поля электрической напряженности зондирующей волны в направлении оси  $O'Y'$  неизменно. Трехмерная задача сводится к двумерной. Распределение поля электрической напряженности зондирующей волны в поперечных срезях цилиндрического столба плазмы в пределах  $ABCD$  совпадает с распределением поля в сечении  $N - N$ , рис. 3.

Так как объектом исследования импульсной рефлектометрии является распределение электронной плотности плазмы, то интересующей характеристикой взаимодействия является распределение поля электрической напряженности зондирующей волны внутри плазменного слоя. Требуется определить это распределение в пределах одного поперечного среза плазмы с учетом двумерных эффектов.

#### Вывод основных расчетных соотношений

Считая, что плазма может быть полностью описана распределениями комплексной диэлектрической и магнитной проницаемостями, запишем систему уравнений Максвелла в виде [6, 7]:

$$\nabla \tilde{k} \varepsilon_0 \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla k_m \mu_0 \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{E} = -k_m \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \mathbf{H} = -\tilde{k} \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

где  $\tilde{k}$  – комплексное волновое число;  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума;  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей;  $k_m$  – относительная магнитная проницаемость;  $t$  – время.

Взяв  $\text{rot}$  от уравнения (3), производную по времени от уравнения (4) и исключив  $\mathbf{H}$ , получаем волновое уравнение:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla, \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\tilde{k} k_m}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

В случае пренебрежения пространственной дисперсией уравнение преобразуется к виду:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\tilde{k} k_m}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Направление распространения узкого поляризованного пучка зондирующего микроволнового излучения на установках типа токамак можно выбрать так, чтобы вектор напряженности электрического поля пренебрежимо мало отклонялся от ре-

зультирующего вектора напряженности магнитного поля. В этом случае влияние магнитного поля на распространение волны можно не учитывать: волна распространяется в О-моду [4]. Результирующий вектор магнитного поля направлен по оси  $OY$  (рис. 3),  $k_m = 1$ . Записав уравнение (5) в цилиндрической системе координат и учтя сделанные выше замечания о сведении трехмерной задачи к двумерной, получим уравнение Гельмгольца в полярных координатах  $(r, \varphi, t)$  с началом координат в точке  $O$  (рис. 3):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \varphi^2} - \frac{\tilde{k}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (6)$$

Из технических характеристик радар-рефлектометра определяются граничные условия задачи – несущая частота  $f$  и распределение вектора электрической напряженности  $\mathbf{E}$  зондирующей волны на границе плазмы:

$$\mathbf{E}(r = a, \varphi \in [-\varphi_0 : \varphi_0]) = E_0^t(t) E_0^y(\varphi) = E_0^t(t) e^{-\varphi^2/\varphi_0^2}, \quad (7)$$

где  $a$  – малый радиус границы плазмы;  $\varphi_0$  – максимальный угол, ограничивающий освещаемую часть поверхности плазмы;  $E_0^y(\varphi) = e^{-\varphi^2/\varphi_0^2}$  – функция распределения интенсивности излучения на границе плазмы.

Функция  $E_0^t(t)$  имеет вид:

$$E_0^t(t) = E_{\max} \exp \left( -2 \left( \frac{t-T/2}{T} \right)^2 \right) \sin(\omega t),$$

где  $E_{\max}$  – модуль электрической напряженности в каждой точке фронта падающей волны;  $T$  – ширина волнового пакета по уровню  $0,5E_{\max}$ ,  $T=2$  нс;  $f$  – несущая частота излучения;  $\omega$  – угловая частота,  $\omega=2\pi f$ .

Использование метода разделения переменных и применение интегрального преобразования Фурье позволяет получить аналитическое решение уравнения (6) для граничных условий (7) в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} E(r, \varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^M e^{i\omega_j t} \sum_{n=0}^S \left( \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi \right) \frac{R_n(r)}{R_n(a)} \\ R_n(r) = J_n \left( \frac{r\omega}{c} \right) - \frac{1}{c^2} \left( \begin{array}{l} J_n \left( \frac{r\omega}{c} \right) + \\ + C_n N_n \left( \frac{r\omega}{c} \right) + u \left( \frac{r\omega}{c} \right) \end{array} \right), \end{array} \right. \quad (8)$$

где  $M$  – количество гармоник, которые описывают огибающую функцию отраженных от плазмы волновых пакетов, с интересующей точностью;  $S$  – количество слагаемых ряда, описывающего функцию с требуемой точностью;  $J_n$  – функция Бесселя первого рода по индексу  $n$ ;  $N_n$  – функция Неймана по индексу  $n$ ; функция  $u(r\omega/c)$  приводится ниже.

Входящие в систему параметры определяются из выражений:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_0(\varphi, \omega) \cos n\varphi \, d\varphi,$$

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E_0(\varphi, \omega) \sin n\varphi \, d\varphi,$$

$$C_n = \frac{-u \left( \frac{a\omega}{c} \right) - J_n \left( \frac{a\omega}{c} \right)}{N_n \left( \frac{a\omega}{c} \right)}.$$

Подынтегральная функция  $E_0(\varphi, \omega)$  определяет граничные условия (7) после преобразования Фурье:

$$E_0(\varphi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{tk} e^{-i\omega t} E_{\max} \exp \left( -2 \left( \frac{t-T/2}{T} \right)^2 \right) \times \sin(\omega t) e^{-\varphi^2/\varphi_0^2} dt,$$

где интервал  $[0, tk]$  характеризует длительность волнового пакета, составляющую порядка 3 нс.

Функция  $u(r\omega/c)$  системы (8) определяется из решения неоднородного уравнения Бесселя для  $R_n(r\omega/c)$  [8]:

$$\begin{aligned} u \left( \frac{r\omega}{c} \right) &= \\ &= -\frac{\pi}{2c} J_n \left( \frac{r\omega}{c} \right) \int_0^r x^{-1} N_n \left( \frac{x\omega}{c} \right) x^2 \frac{1}{c^2} \omega_p^2(x) dx + \\ &+ \frac{\pi}{2c} N_n \left( \frac{r\omega}{c} \right) \int_0^r x^{-1} J_n \left( \frac{x\omega}{c} \right) x^2 \frac{1}{c^2} \omega_p^2(x) dx. \end{aligned} \quad (9)$$

Используемая функция  $\omega_p^2(r, t)$  характеризует зависимость частоты плазменных колебаний от электронной плотности плазменного слоя:

$$\omega_p^2(r, t) = \frac{e^2 n_e(r, t)}{m_e \varepsilon_0}, \quad (10)$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная среды;  $m_e$ ,  $e$  – масса и заряд электрона.

Во время распространения импульса зондирующей волны все протекающие в плазме процессы находятся в стационарном состоянии. Поэтому  $\omega_p^2(r, t) = \omega_p^2(r)$  при  $0 < t < \tau_{\max}$ , где  $\tau_{\max} = 10$  нс – максимальное значение измеряемого времени пролета зондирующей волны в плазме.

При использовании формулы (10) следует определить функцию  $n_e(r, t)$ . В модели предполагается, что типовые профили плотности электронов в плазме установок типа токамак можно с приемлемой степенью точности аппроксимировать функцией  $n_e(r, t)$  вида:

$$n_e(r, t) = n_e(0, t) \left[ 1 - \left( \frac{r}{a(t)} \right)^{\gamma(t)} \right]^{\beta(t)}, \quad (11)$$

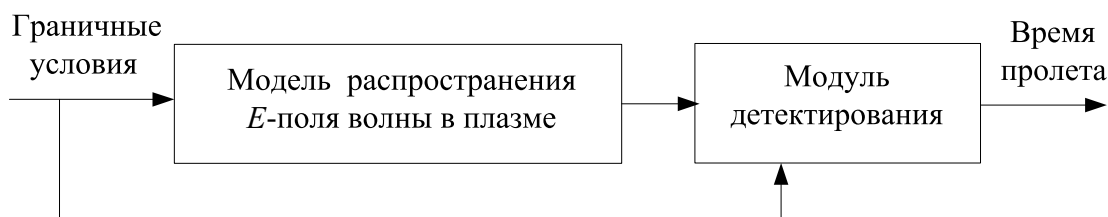


Рис. 4. Структура модели

где  $\gamma$ ,  $\beta$  – функции определенные на множестве действительных чисел,  $a$  – малый радиус границы плазмы.

В итоге из приведенных формул однозначно определяются все компоненты, входящие в (8). Из системы (8) рассчитывается распределение поля электрической напряженности зондирующей волны внутри плазмы. Полученные расчетные соотношения образуют модель распространения  $E$ -поля в плазме.

Для вычисления времени пролета волнового пакета в плазме требуется дополнить разработанную модель модулем детектирования отраженного  $E$ -поля (рис. 4). Модуль автоматического детектирования  $E$ -поля волнового пакета находится в стадии разработки. При отсутствии модуля детектирования время может оцениваться путем визуализации результатов моделирования.

#### Особенности модели

Представленная модель позволяет рассчитать искомое распределение внутри поперечного среза плазмы в динамике с учетом эволюции электронной плотности и двумерных эффектов.

Авторам известна только одна аналитическая модель [9], которая позволяет провести расчет динамики распространения волны в плазме для более узкого класса функций распределения электронной плотности, реализуя частный случай предлагаемой модели.

Представленная модель способна учитывать изменение конфигурации профиля электронной плотности – эволюцию профиля во времени. Это достигается введением зависимостей  $n_{e0}=n_e(0,t)$ ,  $\gamma=\gamma(t)$ ,  $\beta=\beta(t)$ ,  $a=a(t)$  для аппроксимации динамики изменения плотности электронов  $n_e(r,t)$  во времени. Варьирование  $\gamma$ ,  $\beta$  можно проводить на всем

множестве действительных чисел за исключением тех случаев, когда (11) приводит интеграл (9) к классу неберущихся.

Модель допускает проведение корректировки граничных условий с целью повышения точности интерпретации результатов экспериментов. Это осуществимо благодаря тому, что прямое и обратное преобразования Фурье, лежащие в основе модели, кроме гладкости и дифференцируемости не налагают никаких требований на функцию (7).

Применение модели востребовано при разработке методов решения обратной задачи импульсной рефлектометрии. При этом требуется многократно решать прямую задачу, что накладывает требования на повышение скорости проведения вычислений при обеспечении высокой степени точности, что и обеспечивает разработанная модель.

#### Выводы

Разработана двумерная модель пространственно-временного распределения напряженности зондирующей СВЧ волны в плазме при известной конфигурации плотности электронов, принадлежащей к классу гладких функций. Представлена постановка задачи моделирования и аналитическое решение, лежащее в основе модели.

Модель позволяет учесть в динамике влияние двумерных эффектов, упускаемых из рассмотрения при использовании одномерных моделей, не прибегая к численному решению системы уравнений Максвелла.

*За конструктивные предложения и помощь в реализации решения уравнения Гельмгольца авторы статьи выражают благодарность профессору, д.ф.-м.н. Андрею Юрьевичу Трифонову – заведующему кафедрой высшей математики и математической физики ТПУ.*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wesson J., Tokamaks. – Oxford: Oxford University Press, USA, 1987. – 320 p.
2. Baystrukov K.I., Sharnin A.V., et al. Control and data acquisition system of tokamak KTM // Plasma and Fusion Science. – 2008. – № 3. – P. 297–306.
3. Преображенский Н.Г., Пикалов В.В. Неустойчивые задачи диагностики плазмы. – Новосибирск: Наука, 1982. – 238 с.
4. Shevchenko V., Walsh M.J. First Results from the START Multi-frequency Pulse Radar Reflectometer // Rev. Sci. Instrum. – 1997. – № 4. – P. 2040–2045.

5. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Физматгиз, 1960. – 552 с
6. Хилд М. Микроволновая диагностика плазмы. – М.: Атомиздат, 1968. – 392 с.
7. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма – М.-Л.: Изд-во техн.-теор. лит-ры, 1948. – 539 с.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука, 1974. – Т. 2. – 295 с.
9. Bruskin L.G., Mase A. Analytical simulation of microwave reflectometry of a plasma cylinder // Rev. Sci. Instrum. – 2001. – № 72. – P. 4139–4144.

Поступила 14.04.2010 г.